Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А.С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

ЛИНЕЙКА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1957

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 25

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

ЛИНЕЙКА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ

Б[illegible]
МА[illegible]

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

11-2-1

АННОТАЦИЯ

В книжке рассматриваются задачи на построение, решаемые при помощи одной только линейки или с использованием также какой-либо вспомогательной фигуры. В связи с этим рассматриваются некоторые основные понятия проективной геометрии.

Книжка рассчитана на школьников старших классов, студентов младших курсов пединститутов и университетов и преподавателей математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Некоторые теоремы синтетической и проективной геометрии**

§ 1. Бесконечно удаленные элементы плоскости 7
§ 2. Симметрия относительно окружности 10
§ 3. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей. Радикальный центр трех окружностей 12
§ 4. Пучки прямых и окружностей 15
§ 5. Двойное отношение 17
§ 6. Гармоническое расположение четырех точек прямой и четырех прямых пучка 19
§ 7. Гармонические свойства полного четырехугольника . . . 21
§ 8. Конические сечения 22
§ 9. Полярные свойства конических сечений 24
§ 10. Теоремы Брианшона и Паскаля 27

Глава II. **Геометрические построения с помощью линейки**

§ 11. Построение линейкой некоторых прямолинейных фигур . 32
§ 12. Построения линейкой, связанные с коническими сечениями 34
§ 13. Построения линейкой, если заданы две параллельные прямые 38
§ 14. Построения линейкой, если задан параллелограмм или квадрат 42
§ 15. Построения линейкой, если даны окружность и ее центр . 43
§ 16. Построения линейкой, если даны центр окружности и ее дуга 49
§ 17. Построение линейкой точек окружности, принадлежащей данному пучку окружностей 51
§ 18. О невозможности построить линейкой центр окружности . 55
§ 19. Случаи, когда можно построить линейкой центры двух начерченных окружностей 57
§ 20. О построении линейкой центров нескольких окружностей . 60

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопрос о конструктивной мощности линейки и циркуля, т. е. о круге задач, разрешимых этими классическими орудиями геометрических построений (обоими или каждым в отдельности), был полностью изучен лишь в XIX веке. До того времени некоторые математики рассматривали линейку и циркуль как универсальные инструменты, пригодные, если пользоваться ими обоими, для решения любой конструктивной задачи [1]). Такая точка зрения сыграла отрицательную роль в истории развития геометрии; она побуждала подходить к каждой задаче на построение с предвзятой мыслью о разрешимости ее линейкой и циркулем и приводила к тому, что во многих случаях затрачивались огромные усилия на поиски несуществующих решений; так было, например, с задачами о квадратуре круга, трисекции угла, удвоении куба [2]).

Изучение построений, выполняемых одной только линейкой, было вызвано развитием теории перспективы, а также необходимостью производить построения на обширных участках земной поверхности, где применение циркуля с большим раствором технически неосуществимо, в то время как проведение прямых линий легко достигается путем расстановки вех.

В настоящей книжке рассматриваются наиболее типичные конструктивные задачи, решаемые одной только линейкой.

---

[1]) Термин «конструктивная задача» употребляется как синоним термина «задача на построение».

[2]) Так принято называть следующие задачи: 1) зная радиус круга, построить квадрат, равновеликий данному кругу; 2) разделить данный угол на три равные части; 3) зная сторону куба, построить сторону нового куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.

Доказано, что первая и третья задачи не могут быть решены линейкой и циркулем, вторая же разрешима этими инструментами только в отдельных случаях, например, когда данный угол — прямой.

Заслуживают внимания случаи, когда эффективность использования линейки увеличивается благодаря тому, что в плоскости построений заранее начерчена определенная вспомогательная фигура (например, две параллельные прямые или две пересекающиеся окружности). Многие из этих случаев также будут рассмотрены нами.

В нашем изложении мы придерживаемся методов синтетической геометрии, т. е. избегаем применения приемов, характерных для арифметики и алгебры. Лишь в некоторых из начальных параграфов допущены незначительные отклонения от этого принципа, вызванные желанием упростить изложение.

Заметим, что доказательства теорем и решения задач, основанные на применении методов синтетической геометрии, нередко отличаются большим изяществом и оригинальностью; надеемся, что читатель найдет в нашей книжке немало примеров, подтверждающих эти слова.

Обращаем внимание читателя на § 18, в котором показано, что нельзя построить, пользуясь только линейкой, центры двух начерченных неконцентрических окружностей, если эти окружности не имеют ни одной общей точки. Известно, что «доказательства невозможности» принадлежат в большинстве к числу трудных математических проблем и основываются обычно на нетривиальных и остроумных соображениях. Думаем, что читателя заинтересует содержание упомянутого выше параграфа, где помещено одно из таких доказательств.

Ниже приводится греческий алфавит, знаками которого мы нередко будем пользоваться в тексте книжки.

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Αα — альфа	Ιι — йота	Ρρ — ро
Ββ — бета	Κκ — каппа	Σσ — сигма
Γγ — гамма	Λλ — ламбда	Ττ — тау
Δδ — дельта	Μμ — мю	Υυ — ипсилон
Εε — эпсилон	Νν — ню	Φφ — фи
Ζζ — дзета	Ξξ — кси	Χχ — хи
Ηη — эта	Οο — омикрон	Ψψ — пси
Θθϑ — тета	Ππ — пи	Ωω — омега

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СИНТЕТИЧЕСКОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Бесконечно удаленные элементы плоскости

Условимся считать, что каждая прямая (исключая бесконечно удаленную прямую, о чем будет сказано ниже) имеет одну и только одну бесконечно удаленную точку, принадлежащую также всем параллельным ей прямым, и что бесконечно удаленные точки двух прямых, пересекающихся на конечном расстоянии, различны.

Основываясь на этом соглашении, мы можем утверждать, что любые две прямые пересекаются, и притом в одной только точке; если они параллельны, то точка их пересечения будет бесконечно удаленной.

Назовем, далее, бесконечно удаленной прямой множество всех бесконечно удаленных точек плоскости. Позже мы убедимся в целесообразности этого определения.

Введение понятий бесконечно удаленных точек и бесконечно удаленной прямой обусловлено характером вопросов, рассматриваемых в настоящей книжке. Оно избавит нас от необходимости усложнять формулировки ряда теорем указаниями на исключения, которые имели бы место, если бы мы не использовали этих понятий. С другой стороны, оно непосредственно связано с операцией проектирования, которую мы сейчас опишем.

Пусть дана плоскость α с лежащей в ней точкой A и точка P вне α. Пусть прямая PA пересекает плоскость β, не проходящую через P, в точке B. Тогда B называется *проекцией* точки A на плоскость β, прямая PA — *проектирующей прямой*, точка P — *центром проектирования*, β — *плоскостью проекции*. Аналогично

можно рассматривать проектирование с прямой на прямую, если эти прямые и центр проектирования лежат в одной плоскости.

Если в плоскости α дана некоторая фигура F, то, проектируя все ее точки из центра P на плоскость β, получим в плоскости β фигуру Φ, называемую проекцией фигуры F. В частности, проекцией прямой линии будет прямая линия.

Может оказаться, что центр проектирования P есть бесконечно удаленная точка. Тогда все проектирующие прямые параллельны.

Операцию проектирования можно повторить несколько раз. Например, проектируя полученную выше фигуру Φ из центра Q, не лежащего в плоскости β, на плоскость γ, не проходящую через Q, получим фигуру Ψ, которая также называется проекцией фигуры F. Если плоскости α и γ совпадают, то F и ее проекция Ψ будут лежать в одной и той же плоскости.

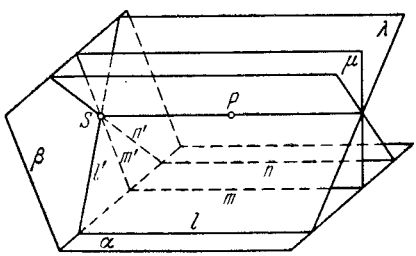


Рис. 1.

Рассмотрим один специальный случай. Пусть в плоскости α даны две параллельные прямые: $l \parallel m$ (рис. 1). Плоскость λ, содержащая l и центр проектирования P, содержит вместе с тем все прямые, проектирующие точки прямой l; пересечение l' этой плоскости с плоскостью β есть проекция прямой l на β. Аналогично, пересечение m' плоскости β с плоскостью μ, содержащей m и P, есть проекция прямой m на плоскость β.

Если плоскости α и β не параллельны и центр проектирования P лежит на конечном расстоянии, то прямые l' и m' пересекаются в некоторой точке S, причем $PS \parallel \alpha$. Если в плоскости α дана еще одна прямая n, параллельная прямым l и m, то ее проекция n' на плоскость β также пройдет через точку S.

Естественно считать точку S проекцией общей бесконечно удаленной точки прямых l, m и n. Говоря определеннее, мы ввели понятие бесконечно удаленных точек именно потому, что без этого понятия, рассматривая прямые l', m' и n' как проекции прямых l, m и n, мы были бы вынуждены исклю-

чить из них точку S, поскольку она не имела бы прообраза в плоскости α.

Нетрудно сообразить, что проекцией множества всех бесконечно удаленных точек плоскости α на плоскость β

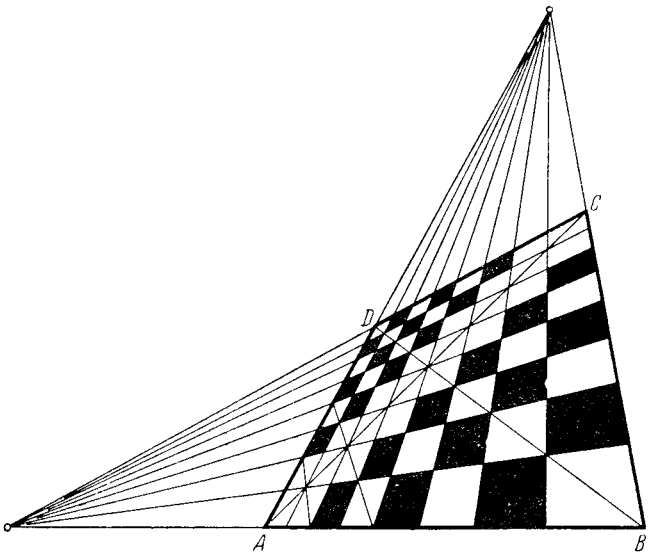


Рис. 2.

будет прямая плоскости β, проходящая через точку S параллельно плоскости α; отсюда ясно, почему это множество мы отнесли выше к категории прямых линий, назвавши его бесконечно удаленной прямой.

Основываясь на приведенных выше соображениях, нетрудно, например, построить проекцию шашечницы, если дана проекция ее контура $ABCD$ (рис. 2).

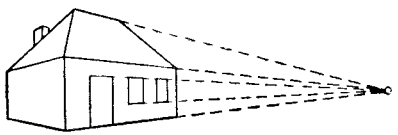


Рис. 3.

Заметим, что параллельные прямые в перспективе представляются нам, вообще говоря, сходящимися; такими же изображаются они на картинах и рисунках (см., например, рис. 3).

Наука, изучающая проективные свойства геометрических фигур, то есть их свойства, не изменяющиеся при проекти-

ровании, называется проективной геометрией. Некоторые теоремы проективной геометрии будут приведены в нашей книжке.

Заметим в заключение, что иногда мы будем рассматривать прямую как окружность бесконечно большого радиуса с центром в бесконечно удаленной точке перпендикуляра к этой прямой.

§ 2. Симметрия относительно окружности

В этом и двух следующих параграфах рассматриваются некоторые теоремы об окружностях, играющие в нашем изложении вспомогательную роль.

Пусть дана окружность $\varkappa$ радиуса r с центром K и отличная от K точка A. Выберем на луче KA точку A' так, чтобы произведение отрезков KA и KA' было равным квадрату радиуса окружности $\varkappa$:

$$KA \cdot KA' = r^2. \tag{1}$$

Условимся говорить, что точки A и A' симметричны относительно окружности $\varkappa$.

Если одна из точек A, A' лежит вне окружности $\varkappa$, то другая лежит внутри $\varkappa$, и обратно; например, из неравенства $KA' < r$ заключаем, принимая во внимание условие (1), что $KA > r$. Если же точка A или A' лежит на окружности $\varkappa$, то A и A' совпадают.

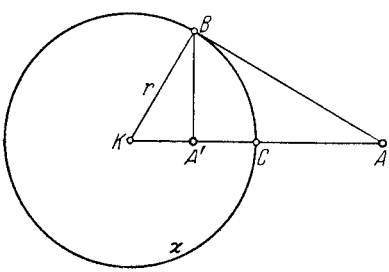


Рис. 4.

Рассмотрим рис. 4, где AB — касательная к окружности $\varkappa$, BA' — перпендикуляр к KA. Так как треугольник KAB — прямоугольный, то

$$KA \cdot KA' = KB^2 = r^2,$$

следовательно, A и A' симметричны относительно $\varkappa$. Отсюда ясен способ построения точки A', если дана точка A, и точки A, если дана точка A'.

Пусть отрезок AA' пересекает окружность $\varkappa$ в точке C и пусть $A'C = a$, $CA = b$. Тогда $KA' = r - a$, $KA = r + b$. В силу (1) будем иметь:

$$(r + b)(r - a) = r^2.$$

Отсюда

$$b - a = \frac{ab}{r}. \qquad (2)$$

Если, закрепив точки C и A, неограниченно увеличивать r, то в пределе окружность $\varkappa$ обратится в прямую CD, перпендикулярную к CA; вместе с тем из (2) получаем:

$$b = a,$$

следовательно, точки A и A' будут расположены симметрично относительно прямой CD. Итак, в рассмотренном нами предельном случае симметрия относительно окружности переходит в симметрию относительно прямой [1]).

Теорема 1. *Если окружность* λ *проходит через две различные точки* A *и* A', *симметричные относительно окружности* $\varkappa$, *то окружности* $\varkappa$ *и* λ *взаимно ортогональны.*

Две окружности называются взаимно ортогональными, если они пересекаются под прямым углом, то есть касательные к ним в точке их пересечения (или, что то же, их радиусы, проведенные в эту точку) взаимно перпендикулярны [2]).

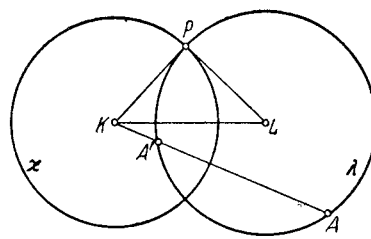


Рис. 5.

Пусть K и L — центры окружностей $\varkappa$ и λ, P — одна из точек их пересечения (рис. 5). Так как KP — радиус окружности $\varkappa$, то равенство (1) принимает вид: $KA \cdot KA' = KP^2$. Отсюда заключаем, принимая во внимание теорему о произведении секущей относительно окружности на ее внешнюю часть, что KP есть касательная к окружности λ, следовательно, радиусы KP и LP данных окружностей взаимно перпендикулярны и эти окружности взаимно ортогональны.

Теорема 2. *Если окружности* $\varkappa$ *и* λ *взаимно ортогональны, то прямая, проходящая через центр* K *окружности* $\varkappa$ *и пересекающая окружность* λ, *пересекает ее в точках, симметричных относительно* $\varkappa$.

---

[1]) Этим объясняется происхождение введенного выше термина «симметрия относительно окружности».

[2]) Если одна из двух взаимно ортогональных окружностей вырождается в прямую, то она проходит через центр второй окружности, в чем легко убедиться.

Воспользуемся обозначениями рис. 5, считая, что окружности $\varkappa$ и λ взаимно ортогональны и, следовательно, KP есть касательная к окружности λ. Пусть прямая, проходящая через K, пересекает λ в точках A и A'. Тогда

$$KA \cdot KA' = KP^2.$$

Поскольку произведение отрезков KA и KA' равно квадрату радиуса KP окружности $\varkappa$, то точки A и A' симметричны относительно $\varkappa$, что и требовалось доказать.

§ 3. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей. Радикальный центр трех окружностей

Пусть даны окружность $\varkappa$ радиуса r с центром K и точка A, находящаяся на расстоянии d от K. Величина

$$\sigma = d^2 - r^2 \tag{1}$$

называется степенью точки A относительно окружности $\varkappa$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) A лежит вне $\varkappa$. Тогда $d > r$, $\sigma > 0$. В этом случае величина σ равна квадрату касательной, проведенной из A

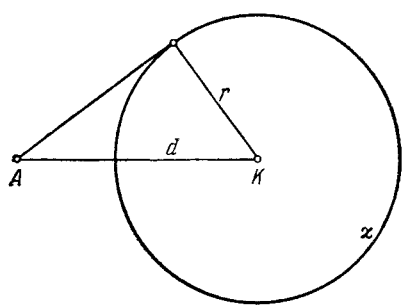


Рис. 6.

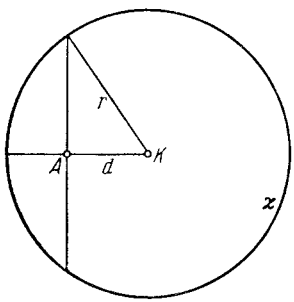


Рис. 7.

к $\varkappa$, или, что то же, произведению выходящей из A секущей окружности $\varkappa$ на ее внешнюю часть (рис. 6).

2) A лежит на $\varkappa$. Тогда $d = r$, $\sigma = 0$.

3) A лежит внутри $\varkappa$. Тогда $d < r$, $\sigma < 0$. В этом случае величина σ равна квадрату половины наименьшей из хорд окружности $\varkappa$, проходящих через A, взятому со знаком минус, или, что то же, взятому со знаком минус про-

изведению отрезков, на которые любая хорда окружности $\varkappa$, проходящая через A, делится точкой A (рис. 7).

Лемма. *Если разность квадратов расстояний точки M от двух данных точек A и B есть постоянная величина, то геометрическое место τ точки M есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.*

Пусть точка N прямой AB и точка M вне этой прямой принадлежат геометрическому месту τ. Обозначим длины отрезков AB и AN соответственно через a и x. Согласно условию,

$$AM^2 - BM^2 = c, \quad (2)$$

где c — данная постоянная величина, и

$$x^2 - (a - x)^2 = c.$$

Из последнего равенства находим:

$$x = \frac{a^2 + c}{2a}.$$

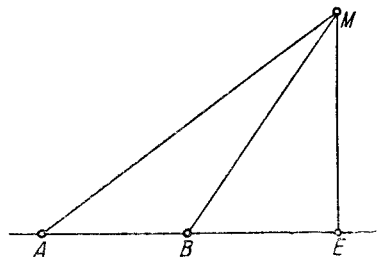


Рис. 8.

Отсюда заключаем, что на прямой AB лежит одна и только одна точка геометрического места τ.

Построим $ME \perp AB$ (рис. 8). Тогда

$$AM^2 - AE^2 = EM^2 = BM^2 - BE^2.$$

Следовательно,

$$AM^2 - BM^2 = AE^2 - BE^2.$$

Отсюда и из (2) имеем:

$$AE^2 - BE^2 = c,$$

а это означает, что точки E и N совпадают. Поэтому τ есть перпендикуляр к прямой AB, проведенный через точку N, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Геометрическое место точки, степени которой относительно двух данных окружностей равны между собой, есть прямая, перпендикулярная к линии центров этих окружностей.*

Пусть r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей, d_1 и d_2 — расстояния точки, принадлежащей искомому геометрическому месту, от их центров. Тогда в силу (1)

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

Отсюда

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2. \qquad (3)$$

Применив к этому равенству с постоянной правой частью доказанную выше лемму, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Рассмотренное геометрическое место называется радикальной осью двух данных окружностей.

Радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения, так как степень каждой из этих двух точек относительно каждой из данных окружностей равна нулю.

Радикальная ось двух окружностей, касающихся друг друга, есть их общая касательная в их точке касания.

Если две окружности не имеют ни одной общей точки, то ни одна из этих окружностей не имеет общей точки с их радикальной осью, так как в противном случае через эту точку проходили бы обе данные окружности.

Теорема 4. *Радикальная ось окружностей* μ *и* ν (без их общей хорды, если они пересекаются) *есть геометрическое место центров окружностей, ортогональных к* μ *и* ν.

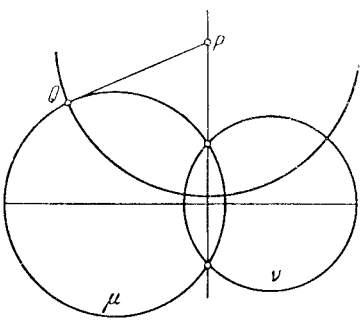


Рис. 9.

Возьмем на радикальной оси окружностей μ и ν внешнюю относительно них точку P (рис. 9). Касательные из P к μ и ν равны между собой вследствие равенства степеней точки P относительно данных окружностей. Пусть PQ — одна из этих касательных. Очевидно, окружность радиуса PQ с центром P ортогональна к окружностям μ и ν. С другой стороны, касательные к μ и ν из центра M любой ортогональной к ним окружности равны ее радиусу; следовательно, степени точки M относительно μ и ν равны между собой, и M лежит на радикальной оси данных окружностей.

Если окружности μ и ν имеют общий центр N, то ортогональные к ним окружности вырождаются в прямые, проходящие через N, а так как «центр» прямой есть бесконечно удаленная точка (см. § 1), то теорема 4 дает нам

основание утверждать, что радикальной осью двух концентрических окружностей следует считать бесконечно удаленную прямую. Нетрудно также убедиться, что ни одна из точек, находящихся на конечном расстоянии, не может принадлежать радикальной оси двух концентрических окружностей; действительно, для такой точки левая часть равенства (3) обращается в нуль, в то время как правая часть отлична от нуля.

Теорема 5. *Радикальные оси трех окружностей, взятых попарно, либо пересекаются в одной точке, называемой радикальным центром этих окружностей, либо совпадают.*

Действительно, общая точка двух радикальных осей имеет одну и ту же степень относительно каждой из трех данных окружностей, следовательно, она принадлежит и третьей радикальной оси. Отсюда, в частности, вытекает, что в случае, когда две радикальные оси совпадают, третья совпадает с ними, т. е. три данные окружности имеют общую радикальную ось.

Если центры трех окружностей лежат на одной прямой, то их радикальные оси параллельны и, следовательно, либо пересекаются в бесконечно удаленной точке, либо совпадают.

§ 4. Пучки прямых и окружностей

Пучком прямых называется множество прямых плоскости, проходящих через одну и ту же точку — центр пучка. Очевидно, через каждую точку плоскости, отличную от центра пучка, проходит одна и только одна прямая пучка.

Пучком окружностей называется множество окружностей, имеющих общую радикальную ось, называемую радикальной осью пучка.

В частности, множество окружностей, концентричных с данной окружностью, образует пучок окружностей с бесконечно удаленной радикальной осью, причем через каждую точку плоскости проходит одна окружность этого пучка (их общий центр представляет собой окружность, стянувшуюся в точку).

Если из центра одной из двух неконцентрических окружностей опустить перпендикуляр на их радикальную ось, то он, в силу теоремы 3, пройдет через центр второй из этих окружностей. Отсюда заключаем, что окружности пучка имеют общую линию центров.

Из теоремы 4 вытекает, что окружность, ортогональная к двум окружностям пучка, ортогональна к каждой окружности пучка.

Две окружности μ и ν всегда определяют пучок окружностей. Покажем, как провести окружность этого пучка через произвольную точку P плоскости, отличную от точек данных окружностей и точек их радикальной оси. Рассмотрим три случая, считая, что данные окружности неконцентричны.

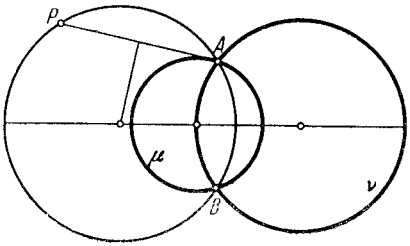


Рис. 10.

1) Окружности μ и ν пересекаются в точках A и B. Искомая окружность пройдет через точки A, B, P. Ее центр лежит на линии центров окружностей μ и ν, являющейся медиатрисой[1]) отрезка AB.

В этом случае пучок называется эллиптическим. Все окружности эллиптического пучка проходят через точки пересечения двух окружностей этого пучка (рис. 10).

2) Окружности μ и ν имеют касание в точке C. Искомая окружность касается данных окружностей в точке C. Ее центром будет точка пересечения медиатрисы отрезка CP с линией центров окружностей μ и ν.

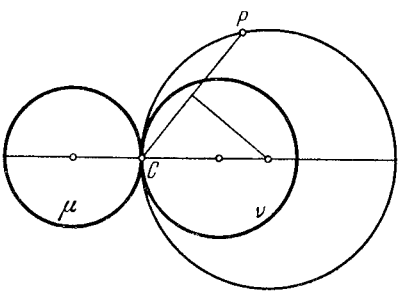


Рис. 11.

Такой пучок называется параболическим (рис. 11).

3) Окружности μ и ν не имеют ни одной общей точки. Строим окружность $\varkappa$, ортогональную к μ и ν, и точку P', симметричную с P относительно $\varkappa$ (рис. 12). Центром искомой окружности ξ будет точка пересечения медиатрисы отрезка PP' с линией центров окружностей μ и ν. Действи-

[1]) Медиатрисой отрезка называется перпендикуляр к отрезку в его середине.

тельно, в силу теоремы 1, окружность ξ ортогональна к окружности $\varkappa$, следовательно, касательные, проведенные из центра K окружности $\varkappa$ к окружностям μ, ν и ξ, равны между собой.

Если точки P и P' совпадают, то роль медиатрисы отрезка PP' будет играть касательная из P к $\varkappa$. Если P есть точка пересечения окружности $\varkappa$ с линией центров окружностей μ и ν, то окружность ξ вырождается в точку P.

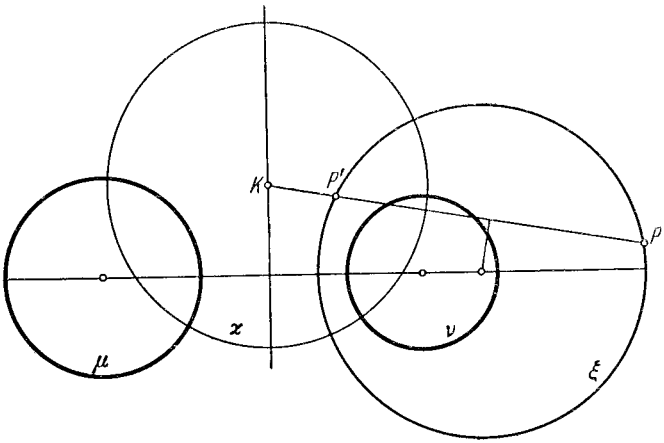


Рис. 12.

В рассмотренном случае пучок окружностей называется гиперболическим. В гиперболическом пучке не существует двух окружностей, имеющих общую точку.

§ 5. Двойное отношение

Рассмотрим на прямой l отрезок AB и точку C, а также точку P вне этой прямой (рис. 13). Обозначим соответственно прямые PA, PB, PC через a, b, c, углы PAB и PBA через α и β, угол APB через (a, b) и т. п.

Воспользовавшись теоремой синусов, получим:

$$AC = CP\frac{\sin(a, c)}{\sin\alpha}, \qquad CB = CP\frac{\sin(c, b)}{\sin\beta}.$$

Отсюда

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Вычисляя отношение $AC:CB$ по формуле (1), нужно считаться с направлениями отрезков и углов: мы будем приписывать двум отрезкам одинаковые знаки, если их направления совпадают, и разные знаки, если их направления противоположны. Аналогичное соглашение вводится и для углов. В силу этого $AC:CB>0$, если C лежит между A и B, и $AC:CB<0$, если C лежит на прямой AB вне отрезка AB.

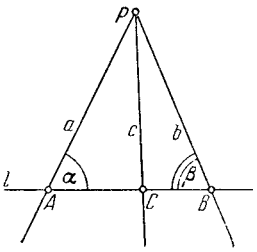


Рис. 13.

Рассмотрим еще одну точку D прямой l и прямую PD, которую мы обозначим через d. Аналогично равенству (1) получим:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{\sin(a,\,d)}{\sin(d,\,b)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB},$$

$$(abcd)=\frac{\sin(a,\,c)}{\sin(c,\,b)}:\frac{\sin(a,\,d)}{\sin(d,\,b)}.$$

Величина $(ABCD)$ называется двойным отношением четырех точек A, B, C, D одной прямой, величина $(abcd)$ — двойным отношением четырех прямых a, b, c, d одного пучка. Двойное отношение называют также сложным или ангармоническим отношением.

Из (1) и (2) вытекает следующее равенство:

$$(ABCD)=(abcd). \qquad (3)$$

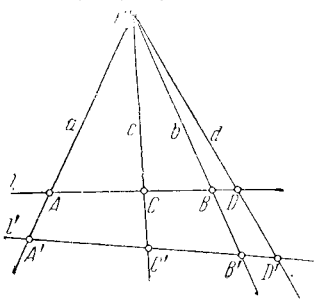


Рис. 14.

Проведем отличную от l прямую l', не проходящую через P, и обозначим точки пересечения ее с a, b, c, d соответственно через A', B', C', D' (рис. 14); очевидно, эти точки можно рассматривать как проекции точек A, B, C, D на прямую l' из центра P. Аналогично равенству (3) будем иметь:

$$(A'B'C'D')=(abcd).$$

Отсюда и из (3) получим:

$$(A'B'C'D')=(ABCD).$$

Из сказанного выше вытекают следующие теоремы.

Теорема 6. *Если четыре прямые пучка пересечь пятой прямой, не проходящей через центр пучка, то двойное отношение данных четырех прямых равно двойному отношению соответствующих точек пересечения.*

Теорема 7. *Двойное отношение четырех точек прямой не изменяет своей величины при проектировании.*

Нетрудно убедиться, что аналогичным свойством обладают и четыре прямые пучка. Доказательства мы не приводим, так как это свойство не будет нами использовано.

Теорема 8. *Если в двойном отношении* $(ABCD)$ *поменять местами точки* A *и* B (*или* C *и* D), *то оно перейдет в обратную ему величину.*

Действительно,

$$(BACD) = \frac{BC}{CA} : \frac{BD}{DA} = \frac{CB}{AC} : \frac{DB}{AD} = \frac{1}{(ABCD)};$$

$$(ABDC) = \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Заметим в заключение, что двойное отношение четырех различных точек не может равняться единице. Действительно, если

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1,$$

то

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Отсюда вытекает, если A и B — различные точки, что точки C и D совпадают, следовательно, наше утверждение справедливо.

§ 6. Гармоническое расположение четырех точек прямой и четырех прямых пучка

Мы будем говорить, что пара точек C, D произвольной прямой разделяет гармонически пару точек A, B той же прямой, если двойное отношение $(ABCD)$ этих точек равно —1:

$$(ABCD) = -1. \qquad (1)$$

Это означает, что точки C и D делят отрезок AB в одном и том же по абсолютной величине отношении, одна — внутренним, другая — внешним образом. Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 9. *В любом треугольнике PQR пара точек пересечения прямой PQ с биссектрисами угла при вершине R и смежного с ним угла разделяет гармонически пару точек P, Q.*

Если условие (1) выполнено, то говорят также, что точки A, B; C, D одной и той же прямой образуют гармоническую группу, а точку D называют четвертой гармонической к точкам A, B; C. Обращаем внимание на расстановку в этой записи знаков пунктуации: *точка с запятой* отделяет точки одной пары от точек (или точки) другой пары.

Аналогичная терминология используется и в отношении четырех прямых a, b, c, d пучка, если

$$(abcd) = -1.$$

Теорема 10. *Если пара точек C, D разделяет гармонически пару точек A, B, то и пара A, B разделяет гармонически пару C, D.*

Действительно,

$$(CDAB) = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD) = -1.$$

Теорема 11. *Если точки A и A' симметричны относительно окружности $\varkappa$ и прямая AA' пересекает окружность $\varkappa$ в точках M и N, то точки A, A'; M, N образуют гармоническую группу.*

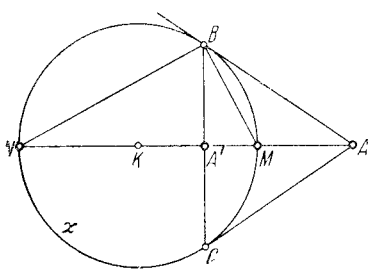


Рис. 15.

Пусть точка A лежит вне окружности $\varkappa$ (рис. 15). Проведем из A касательные AB и AC к $\varkappa$ и построим прямые BC, BM, BN. Так как прямая AA' проходит через центр K окружности $\varkappa$, то BC пересекает ее в точке A' (см. § 2, рис. 4).

Очевидно, $\angle ABM = \angle MBC$, так как эти углы измеряются соответственно половинами равных между собой дуг BM и MC окружности $\varkappa$. Следовательно, полупрямая BM есть биссектриса угла B в треугольнике ABA', а перпендикулярная к ней полупрямая BN — биссектриса угла, смежного

с B. Поэтому в силу теоремы 9 точки A, A'; M, N образуют гармоническую группу.

Из теоремы 11 вытекает простой способ построения четвертой гармонической точки D к трем данным точкам A, B; C, лежащим на одной прямой: на отрезке AB, как на диаметре, описываем окружность λ и строим точку D, симметричную с C относительно λ. Если точка C является серединой отрезка AB, то, как видно из этого построения, D будет бесконечно удаленной точкой.

В параграфе 11 мы покажем, что построение четвертой гармонической точки можно выполнить, пользуясь только линейкой.

§ 7. Гармонические свойства полного четырехугольника

Теоремы, которые будут доказаны в этом параграфе, имеют важное значение для последующего изложения; мы будем пользоваться ими при решении многих конструктивных задач.

Полным четырехугольником называется фигура, состоящая из четырех точек — вершин четырехугольника, не лежащих по три на одной прямой (A, B, C, D на рис. 16), и шести прямых, соединяющих попарно эти точки, — сторон четырехугольника.

Стороны полного четырехугольника пересекаются, помимо вершин, еще в трех точках (на рисунке — K, L, M). Прямые KL, LM, MK называются диагоналями полного четырехугольника.

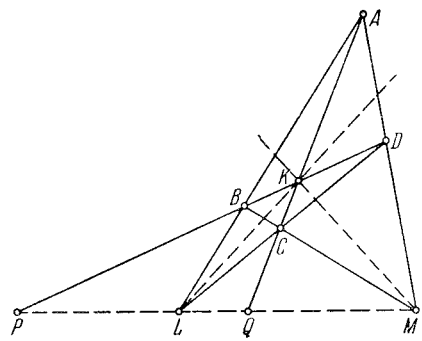


Рис. 16.

Теорема 12. *Каждая пара диагоналей полного четырехугольника разделяет гармонически пару его сторон, проходящих через точку пересечения этих диагоналей.*

Пусть прямые BD и AC пересекают диагональ LM полного четырехугольника $ABCD$ в точках P и Q (см. рис. 16). Точки L, M, P, Q являются соответственно проекциями

точек B, D, P, K стороны BD из центра A; поэтому (теорема 7)

$$(LMPQ) = (BDPK). \tag{1}$$

С другой стороны, точки L, M, P, Q будут соответственно проекциями точек D, B, P, K из центра C; поэтому

$$(LMPQ) = (DBPK). \tag{2}$$

Но в силу теоремы 8 имеем:

$$(DBPK) = \frac{1}{(BDPK)}.$$

Следовательно, перемножив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$(LMPQ)^2 = 1. \tag{3}$$

Поскольку равенство $(LMPQ) = 1$ в данном случае невозможно (см. § 5), то из (3) будем иметь:

$$(LMPQ) = -1. \tag{4}$$

Через точку K проходят четыре прямые, пересекающие диагональ LM в точках L, M, P, Q: две стороны и две диагонали полного четырехугольника $ABCD$; из равенства (4) на основании теоремы 6 выводим, что эти прямые образуют гармоническую группу:

$$(KL,\ KM,\ BD,\ AC) = -1.$$

Итак, теорема доказана.

Теорема 13. *Пара точек диагонали полного четырехугольника, через которые проходит по одной только его стороне, разделяет гармонически пару точек той же диагонали, через которые проходят по две его стороны.*

Так, для диагонали LM полного четырехугольника $ABCD$ (рис. 16) точками первой пары будут P, Q, точками второй пары — L, M. Справедливость теоремы вытекает из равенства (4).

§ 8. Конические сечения

Пусть прямые l и m, пересекающиеся в точке S, образуют угол, отличный от прямого угла. Прямая m, вращаясь вокруг неподвижной прямой l, опишет бесконечную поверхность — круговой конус **K**, состоящий из двух полостей, соединенных точкой S — вершиной конуса.

Пересекая конус **K** какой-нибудь плоскостью α, получим линию q, называемую коническим сечением. Считая, что α не проходит через вершину S конуса **K**, будем различать такие случаи:

1) плоскость α пересекает все образующие одной полости конуса; тогда q — замкнутая овальная линия — эллипс (рис. 17); частным случаем эллипса, когда $\alpha \perp l$, является окружность;

2) плоскость α параллельна одной из образующих конуса; тогда q — бесконечная незамкнутая линия — парабола (рис. 18);

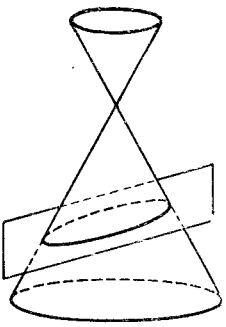


Рис. 17.

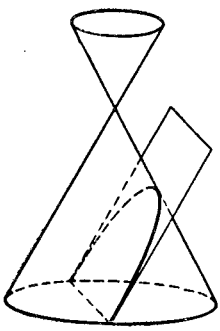


Рис. 18.

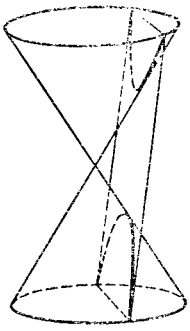


Рис. 19.

3) плоскость α пересекает обе полости конуса; тогда q — незамкнутая линия, состоящая из двух бесконечных ветвей, — гипербола (рис. 19).

Заметим, что точку, а также две прямые можно рассматривать как сечения конуса **K** плоскостью, проходящей через его вершину S; если S — бесконечно удаленная точка, то есть конус вырождается в круговой цилиндр, то эти прямые будут параллельными. Условимся, однако, применять в дальнейшем термин «конические сечения» только к кривым линиям: эллипсу, параболе, гиперболе.

Пусть окружность $\varkappa$ есть сечение конуса **K** плоскостью β, перпендикулярной к оси конуса l (и, конечно, не проходящей через S). Если спроектировать окружность $\varkappa$ из вершины S конуса **K** на плоскость α, то ее проекцией будет коническое сечение q. Отсюда следует, что все проективные свойства окружности переносятся на каждое коническое сечение.

Это замечание мы используем при доказательствах теорем, устанавливающих проективные свойства конических сечений: мы будем приводить доказательства для случая окружности, а отсюда автоматически будет вытекать справедливость соответствующих теорем для любого конического сечения.

§ 9. Полярные свойства конических сечений

Пусть через точку P, лежащую в плоскости конического сечения q, но не на самом коническом сечении, проведена прямая l, пересекающая q в точках M и N. Обозначим через Q четвертую гармоническую точку к M, N; P. Если прямая l вращается вокруг точки P в плоскости данного конического сечения, то Q опишет линию π, называемую полярой точки P относительно q. Точка P называется полюсом линии π.

Полярой точки, лежащей на коническом сечении q, мы будем называть касательную к q в этой точке.

Аналогично определяется поляра точки относительно фигуры, состоящей из двух пересекающихся или двух параллельных прямых. Если точка лежит на одной из данных прямых, то ее полярой называется эта прямая. Поляра точки пересечения двух прямых относительно этих прямых будет неопределенной.

Из определения поляры следует, что полярой центра окружности относительно этой же окружности будет бесконечно удаленная прямая.

Теорема 14. *Поляра точки относительно окружности есть прямая линия, перпендикулярная к прямой, соединяющей данную точку с центром окружности.* (Здесь мы считаем, что данная точка отлична от центра окружности.)

Если данная точка P лежит на данной окружности $\varkappa$, то теорема очевидна. Поэтому дальше мы рассматриваем случай, когда P не лежит на $\varkappa$.

Построим прямую PK, где K — центр окружности $\varkappa$; пусть она пересекает окружность $\varkappa$ в точках A и B. Обозначим через Q точку, симметричную с P относительно $\varkappa$. Пусть прямая l, проходящая через точку P и пересекающая окружность $\varkappa$ в точках M и N, отлична от прямой PK.

На отрезке MN, как на диаметре, построим окружность μ. Проведем, далее, через P и Q окружность ν с цен-

тром на прямой l. Окружность ν ортогональна к окружности $\varkappa$, так как она проходит через две различные точки, симметричные относительно $\varkappa$ (теорема 1); она ортогональна также и к окружности μ, так как ее центр лежит на радикальной оси окружностей $\varkappa$ и μ (теорема 4). Поэтому точки R и P пересечения ее с диаметром MN окружности μ и его продолжением симметричны относительно μ (теорема 2).

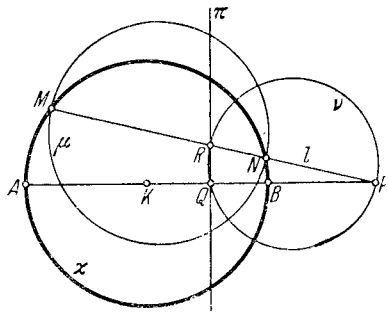


Рис. 20.

Угол PQR, опирающийся на диаметр окружности ν,— прямой, следовательно, точка R лежит на перпендикулярной прямой к PK в точке Q.

Применив теорему 11 к окружностям $\varkappa$ и μ, убеждаемся, что точки Q и R принадлежат поляре π точки P относительно окружности $\varkappa$. Следовательно, π есть перпендикуляр к прямой PK в точке Q, что и требовалось доказать.

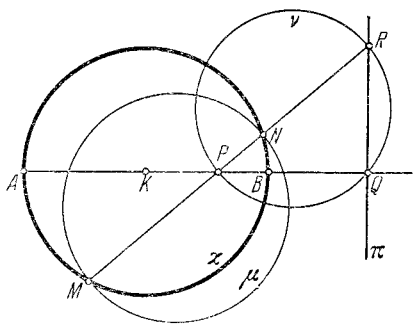


Рис. 21.

Приведенные выше соображения справедливы как тогда, когда P лежит вне, так и тогда, когда P лежит внутри окружности $\varkappa$. Для наглядности мы иллюстрируем каждый из этих случаев отдельным чертежом (рис. 20 и 21). Если придерживаться буквы определения, то в первом случае пришлось бы считать полярой точки P *хорду* окружности $\varkappa$, проходящую через Q перпендикулярно к PK, причем концами этой хорды будут точки касания касательных, проведенных из P к $\varkappa$ (сравн. рис. 4); однако в силу соображений, о которых мы скажем ниже, полярой точки P и в этом случае называют всю прямую, содержащую упомянутую хорду.

Прямым следствием теоремы 14 является

Теорема 15. *Поляра точки относительно конического сечения есть прямая линия.*

Из предыдущего легко сделать следующие выводы:

если точка P лежит вне конического сечения q, то есть через P можно провести прямую, не имеющую с q общих точек, то ее поляра пересекает q в точках касания касательных, проведенных из P к q;

если точка P лежит внутри конического сечения q, то ее поляра не имеет с q общих точек;

если в точках A и B конического сечения q провести касательные к q, то они пересекутся в полюсе прямой AB.

Теорема 16. *Если точка Q лежит на поляре точки P относительно данного конического сечения, то P лежит на поляре точки Q.*

Достаточно убедиться, что теорема справедлива в случае, когда данное коническое сечение есть окружность; обозначим ее через $\varkappa$, ее центр — через K (рис. 22).

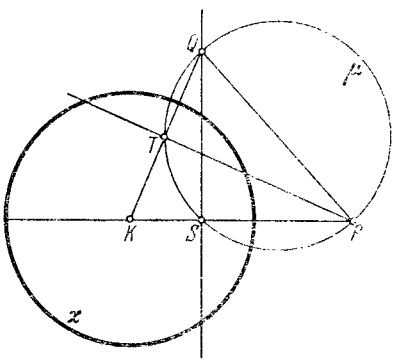


Рис. 22.

Точка S, симметричная с P относительно окружности $\varkappa$, лежит на поляре точки P (теорема 11), и угол PSQ — прямой. Следовательно, окружность μ, построенная на отрезке PQ, как на диаметре, проходит через точку S и поэтому ортогональна к окружности $\varkappa$. Пусть прямая KQ пересекает вторично μ в точке T. Точка T симметрична с Q относительно $\varkappa$ (теорема 2), и угол PTQ — прямой. Отсюда в силу определения поляры и теоремы 14 заключаем, что прямая PT есть поляра точки Q относительно $\varkappa$. Теорема доказана.

Теорема верна и тогда, когда точка P лежит на окружности $\varkappa$, так как поляра каждой точки касательной к $\varkappa$ в точке P проходит через P.

Заметим, что точки P и Q на черт. 22 лежат вне окружности $\varkappa$; из доказательства теоремы 16 вытекает, что целесообразно рассматривать их поляры не как хорды $\varkappa$, а как бесконечные прямые, так как в противном случае пришлось бы внести в формулировку теоремы 16 ряд оговорок.

Пусть прямая l пересекает окружность радиуса r с центром O в точках A и B. Пусть $AC = CB = d$, $OC = h$, где C — середина хорды AB. Очевидно, $d^2 = r^2 - h^2$. Отсюда получим для величины d мнимые значения, если $h > r$. Условимся считать, что и в этом случае прямая l пересекает данную окружность, но точки их пересечения A и B будут мнимыми. Введение понятия мнимых точек оказалось весьма плодотворным; в частности, оно позволило объяснить, почему в случае, когда точка P лежит вне окружности ω, к поляре точки P относительно ω должна быть причислена и внешняя часть хорды, соединяющей точки касания касательных, проведенных из P к ω.

Теорема 17. *Полярой точки относительно пары прямых является прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых (параллельная им, если они параллельны).*

Пусть прямые m и n пересекаются в точке O (рис. 23). Проведем через точку P прямую l, пересекающую m и n в разных точках M и N, и обозначим через Q четвертую гармоническую точку к M, N; P. Прямые m, n; OP, OQ образуют гармоническую группу (теорема 6); следовательно, точки пересечения их с любой отличной от OP прямой, проходящей через P, также образуют гармоническую группу. Отсюда вытекает, что прямая OQ является полярой точки P. Если O — бесконечно удаленная точка, то прямые m, n и OQ параллельны.

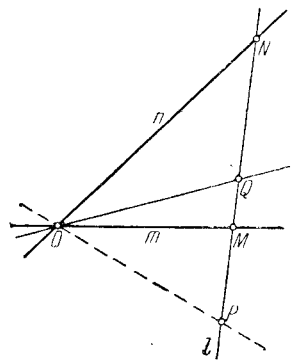


Рис. 23.

§ 10. Теоремы Брианшона и Паскаля

Сделаем предварительно следующее замечание: если на касательных к окружности $\varkappa$ в ее точках A и B отложить по одну сторону прямой AB произвольные, но равные между собой отрезки $AA_1 = BB_1$, то через точки A_1 и B_1 можно провести окружность, касающуюся прямых AA_1 и BB_1 (рис. 24). Это вытекает из симметричности данной фигуры относительно диаметра окружности $\varkappa$, перпендикулярного к хорде AB.

Теорема 18 (Брианшона). *В шестиугольнике, описанном около конического сечения, диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.*

Очевидно, эту теорему достаточно доказать для случая окружности.

Пусть стороны AB, BC, CD, DE, EF, FA шестиугольника $ABCDEF$ касаются окружности $\varkappa$ соответственно в точках a, b, c, d, e, f (рис. 25). Возьмем произвольный отрезок MN и построим соответственно на лучах aB, bB, cD, dD, eF, fF отрезки:

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon = f\zeta = MN. \qquad (1)$$

Проведем через точки α и δ окружность λ, касающуюся прямых $A\alpha$ и $E\delta$, через точки γ и ζ — окружность μ, касающуюся прямых $C\gamma$ и $A\zeta$, и через точки ε и β — окружность ν, касающуюся прямых $E\varepsilon$ и $C\beta$. Возможность этих построений вытекает из равенств (1).

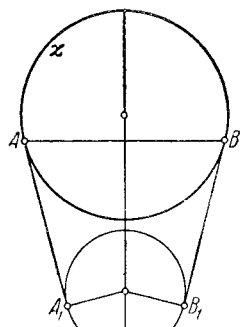


Рис. 24.

Легко убедиться, что прямые AD, BE и CF будут соответственно радикальными осями пар окружностей: λ и μ, λ и ν, μ и ν. Например, точки B и E лежат на радикальной оси окружностей λ и ν, так как $B\alpha = B\beta$ и $E\delta = E\varepsilon$ ($B\alpha = MN - aB$, $B\beta = MN - bB$; $E\delta = MN + Ed$, $E\varepsilon = MN + Ee$).

Следовательно (см. теорему 5), прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке — радикальном центре окружностей λ, μ, ν. Теорема доказана.

Теорема Брианшона верна и в том случае, когда две смежные стороны шестиугольника $ABCDEF$ лежат на одной прямой; тогда их общей вершиной будет точка касания этой прямой с окружностью $\varkappa$.

Рассмотрим, например, описанный около окружности $\varkappa$ четырехугольник $ACDF$ как шестиугольник $ABCDEF$, где B и E — точки касания сторон AC и DF с окружностью $\varkappa$ (рис. 26). В силу теоремы Брианшона прямая BE пройдет через точку S пересечения диагоналей AD и CF данного четырехугольника. Точно так же убеждаемся, что через S проходит и прямая MN, соединяющая точки касания с $\varkappa$ прямых AF и CD. Итак, в описанном около окружности четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, проходят через точку пересечения диагоналей.

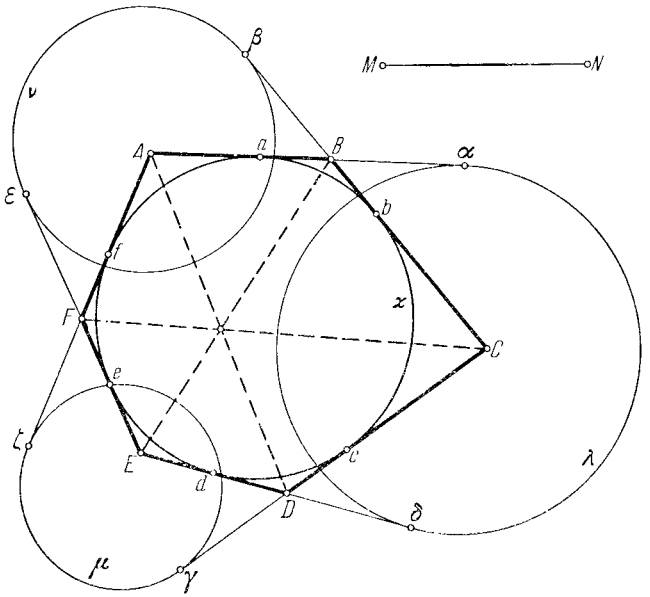


Рис. 25.

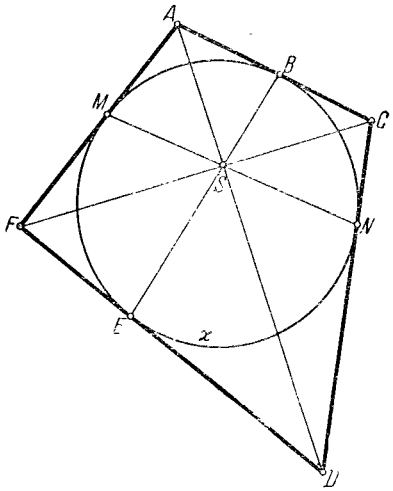


Рис. 26.

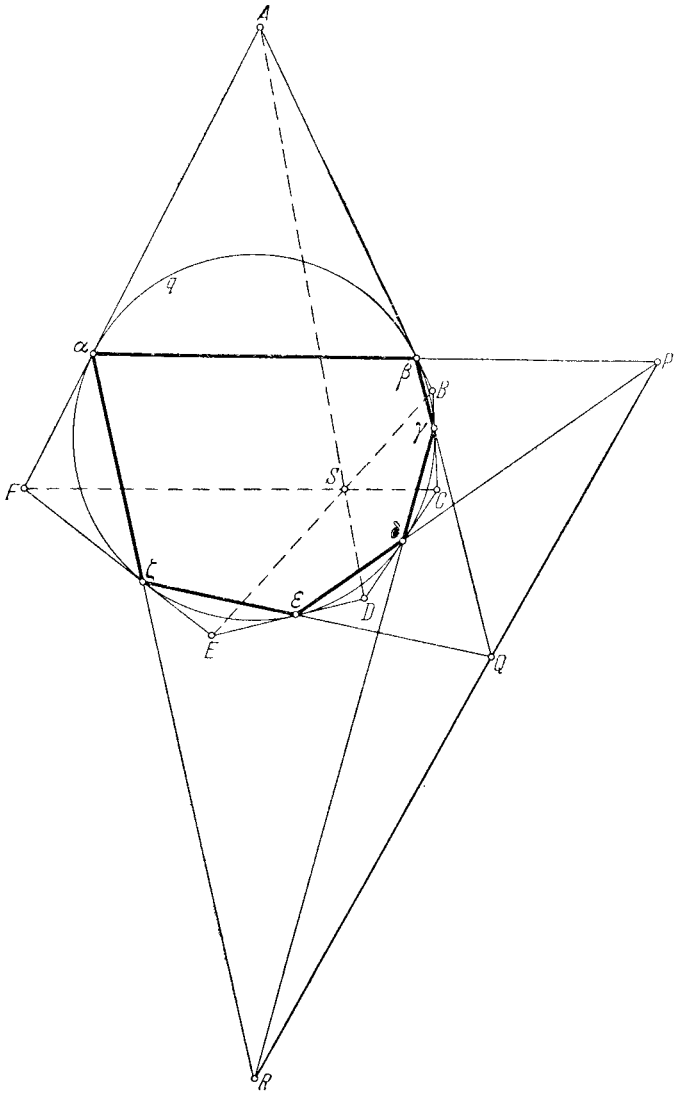


Рис. 27.

Теорема 19 (Паскаля). *Точки пересечения противоположных сторон вписанного в коническое сечение шестиугольника лежат на одной прямой*[1]).

Пусть стороны $\alpha\beta$ и $\delta\varepsilon$ вписанного в коническое сечение q шестиугольника $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ пересекаются в точке P, стороны $\beta\gamma$ и $\varepsilon\zeta$ — в точке Q, стороны $\gamma\delta$ и $\zeta\alpha$ — в точке R (рис. 27). Построим в вершинах этого шестиугольника касательные к q и обозначим образованный ими шестиугольник через $ABCDEF$.

Точка P лежит на поляре $\alpha\beta$ точки A и на поляре $\delta\varepsilon$ точки D; поэтому (теорема 16) прямая AD является полярой точки P. Аналогично убеждаемся, что прямые BE и CF будут соответственно полярами точек Q и R.

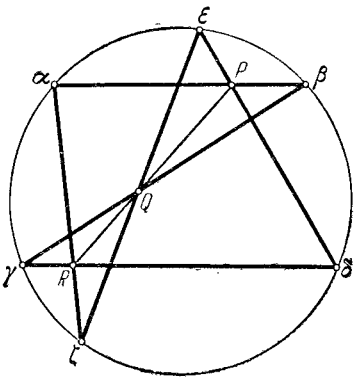


Рис. 28.

В силу теоремы Брианшона прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке S. Поскольку через S проходят поляры точек P, Q, R, то P, Q и R лежат на поляре точки S, т. е. на одной прямой, что и требовалось доказать.

Теорема Паскаля справедлива и тогда, когда две соседние вершины шестиугольника, вписанного в коническое сечение, сливаются в одну. В таком случае нужно считать, что определенная этими вершинами сторона шестиугольника переходит в касательную к коническому сечению в той точке, в которой находятся обе указанные вершины.

Теоремы Паскаля и Брианшона, как видно из их доказательств, имеют силу и в том случае, когда шестиугольники, удовлетворяющие условиям этих теорем, — звездчатые (см., например, рис. 28).

---

[1]) Это — одна из основных теорем проективной геометрии. Впервые она была сформулирована и доказана шестнадцатилетним Блезом Паскалем (1623 — 1662), обнаружившим в раннем возрасте блестящее математическое дарование. Теорема Брианшона вошла в науку значительно позднее, примерно через 150 лет после открытия Паскаля.

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ

§ 11. Построение линейкой некоторых прямолинейных фигур

Задача 1. На прямой l даны три различные точки A, B, C. Построить точку D, разделяющую гармонически вместе с точкой C пару точек A, B.

Идея построения, основанного на использовании гармонических свойств полного четырехугольника, очевидна. Все же мы рассмотрим подробно все этапы построения, учитывая важность данной задачи.

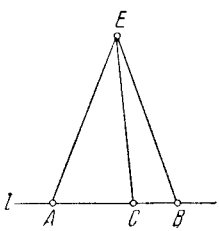


Рис. 29.

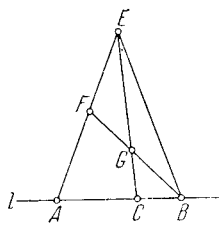


Рис. 30.

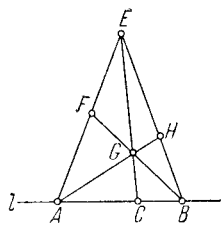


Рис. 31.

Берем произвольную точку E вне прямой l и проводим прямые AE, BE, CE (рис. 29). На AE берем точку F, отличную от A и E, и строим прямую BF, пересекающую CE в точке G (рис. 30). Проводим прямую AG, пересекающую BE в точке H (рис. 31). Прямая FH пересекает l в искомой точке D (рис. 32).

Действительно, прямая AB есть диагональ полного четырехугольника $EFGH$; поэтому в силу теоремы 13 $(ABCD) = -1$,

На рис. 33 выполнено то же построение для случая, когда точка C лежит вне отрезка AB.

Задача 2. Даны три различные прямые a, b, c, принадлежащие одному пучку. Построить прямую d, разделяющую гармонически вместе с c пару прямых a, b.

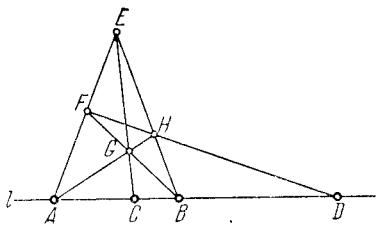


Рис. 32.

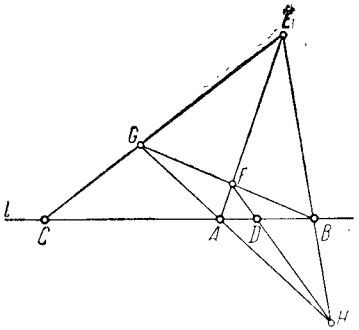


Рис. 33.

Проводим прямую l, не проходящую через центр пучка, т. е. через точку пересечения данных прямых; пусть l пересекает их соответственно в точках A, B, C. Строим точку, разделяющую гармонически вместе с C пару точек A, B (задача 1), и соединяем ее прямой с центром пучка.

Задача 3. Провести прямую через данную точку A и недоступную точку[1]) пересечения данных прямых a и b.

Построение приведено на рис. 34; его правильность доказывается следующими соображениями. Обозначим через X недоступную точку пересечения прямых a и b. Прямые a и b являются сторонами, прямые XA и XF — диагоналями полного четырехугольника $BDCE$; поэтому XA есть четвертая гармоническая прямая к a, b; XF (теорема 12). Точно так же, рассматривая полный четырехугольник $BDGH$,

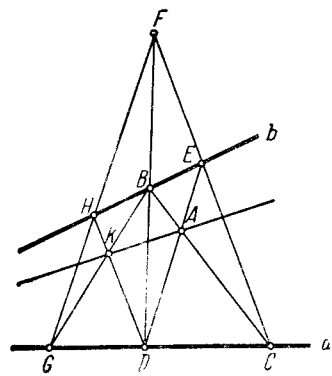


Рис. 34.

[1]) Недоступными частями фигуры называются ее части, лежащие за пределами чертежа.

убеждаемся, что XK есть четвертая гармоническая прямая к тем же прямым a, b; XF. Итак, прямые XA и XK совпадают, следовательно, AK есть искомая прямая.

Предлагаем читателю рассмотреть случай, когда точка A лежит вне полосы, заключенной между прямыми a, b.

§ 12. Построения линейкой, связанные с коническими сечениями

Задача 4. Дано коническое сечение q и точка P, не лежащая на q. Построить поляру π точки P.

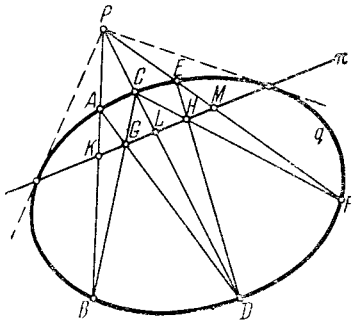


Рис. 35.

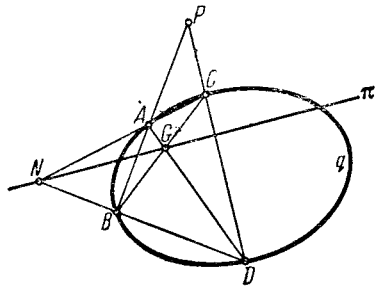


Рис. 36.

На рисунках 35, 36 и 37 даны различные варианты построения, основанные на гармонических свойствах полного четырехугольника.

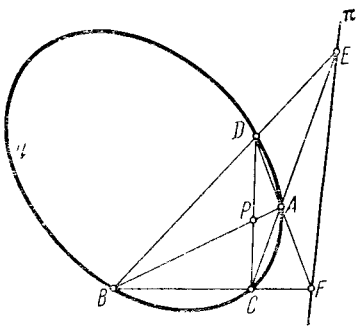


Рис. 37.

Рассмотрим конфигурацию рисунка 35. Если построить на секущих PA, PC, PE точки K, L, M так, чтобы выполнялись условия:

$$(ABPK) = (CDPL) = \\ = (EFPM) = -1, \quad (1)$$

то, в силу свойств полных четырехугольников $ABDC$ и $CDFE$, прямые KL и LM будут соответственно диагоналями этих четырехугольников, причем первая из них пройдет через точку G, вторая — через точку H. Но из равенств (1) вытекает, что точки K, L, M принадлежат поляре π точки P, следова-

тельно, π проходит через G и H. Фактически точки K, L, M не строятся; мы рассмотрели их только для того, чтобы обосновать предложенное решение.

Рассмотренное построение можно упростить, отказавшись от проведения секущей PE, так как диагональ KL полного четырехугольника $ABDC$ должна пройти через точку G и через точку пересечения сторон AC и BD (рис. 36).

Построение, выполненное на рис. 37, можно обосновать так: из предыдущего построения следует, что прямые PE и PF (не проведенные на чертеже) будут соответственно полярами точек F и E; поэтому в силу теоремы 16 поляра π точки P пройдет через E и F.

Задача 5. Даны коническое сечение q и точка P, не лежащая на q. Провести из P касательные к q.

Строим поляру π точки P и соединяем P прямыми с точками пересечения линий q и π. На рис. 35 касательные из P к q изображены пунктиром.

Если линии q и π не пересекаются, то искомые касательные не существуют.

Задача 6. Даны коническое сечение и прямая π. Построить полюс P этой прямой.

Берем на π две произвольные точки A и B. Строим поляру a точки A и поляру b точки B. Прямые a и b пересекутся в искомой точке P (теорема 16).

Задача 7. Через точку P данного конического сечения провести касательную к нему.

Проводим через P произвольную секущую и находим ее полюс Q. Прямая PQ будет искомой касательной.

Задача 8. Даны пять точек A, B, C, D, E конического сечения q. Построить какую-нибудь шестую точку линии q.

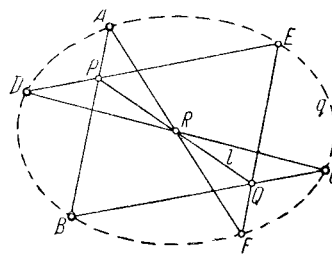


Рис. 38.

Принимаем точки A, B, C, D, E за пять последовательных вершин шестиугольника Паскаля, вписанного в линию q (рис. 38). Строим прямые AB и DE и через точку P их пересечения проводим произвольную прямую l. Пусть прямые BC и CD пересекают l соответственно в точках Q и R. Проводим прямые EQ и AR; их общая точка F лежит на коническом сечении q.

Действительно, точки пересечения противоположных сторон (AB и DE, BC и EF, CD и FA) шестиугольника $ABCDEF$ лежат на одной прямой; если бы прямая AR вторично пересекала q в точке F', отличной от F, то прямая EF' не прошла бы через точку Q, что противоречит теореме Паскаля.

Замечание. Если известна одна точка пересечения какой-либо прямой с коническим сечением, заданным пятью точками, то, применяя рассмотренный выше способ, можно построить линейкой вторую точку их пересечения. Однако, пользуясь только линейкой, нельзя построить точек пересечения данной прямой с коническим сечением, определенным пятью точками, если ни одна из точек пересечения не задана.

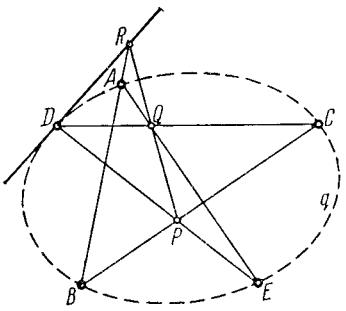


Рис. 39.

Задача 9. Даны пять точек A, B, C, D, E конического сечения q. Построить касательную к q в одной из этих точек.

Построим касательную к q в точке D (рис. 39). Принимая за стороны вписанного в q шестиугольника прямые AB, BC, CD, касательную к q в D, DE и EA, находим точку P пересечения прямых BC и DE и точку Q пересечения прямых CD и EA. Обозначим через R общую точку прямых AB и PQ. Прямая DR будет искомой касательной.

Задача 10. Даны четыре точки A, B, C, D конического сечения q и касательная a к q в точке A. Построить пятую точку линии q.

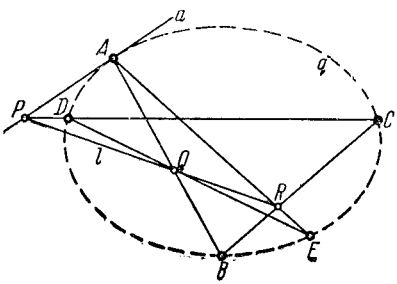


Рис. 40.

Принимая за стороны вписанного в q шестиугольника прямые: a, AB, BC, CD, находим точку P пересечения прямых a и CD. Через P проводим произвольную прямую l; пусть она пересекает AB в точке Q и BC в точке R (рис. 40). Общая точка E прямых AR и DQ лежит на линии q.

Задача 11. Даны пять касательных a, b, c, d, e к коническому сечению q. Построить шестую касательную к линии q.

Принимаем a, b, c, d, e за стороны описанного около q шестиугольника (рис. 41). Пусть прямые a и b пересекаются в точке A, прямые d и e — в точке D. Проводим прямую AD, берем на ней произвольную точку K, отличную от A и D, и строим прямые BK и CK. Пусть CK пересекает a в точке F и BK пересекает e в точке E. Прямая EF будет искомой касательной.

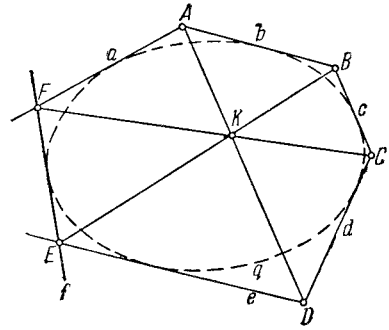


Рис. 41.

Действительно, если из точки F провести касательную f к q, то образуется шестиугольник $abcdef$, описанный около q. Прямые, соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, пересекаются, в силу теоремы Брианшона, в одной точке. Две из этих прямых — AD и CF — пересекаются в точке K. Следовательно, касательная f должна пройти через точку E, лежащую и на e и на BK.

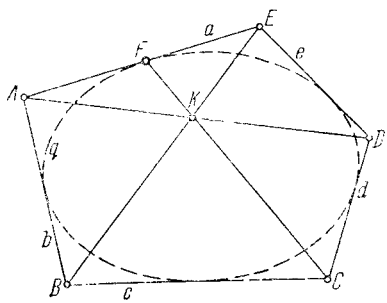


Рис. 42.

Задача 12. Даны пять касательных a, b, c, d, e к коническому сечению q. Построить точку, в которой прямая a касается линии q.

Мы уже отмечали (см. § 10), что теорема Брианшона верна и тогда, когда две прилежащие к одной вершине стороны описанного шестиугольника сливаются в одну прямую. В таком случае за вершину, общую этим сторонам, следует принять точку их касания с данным коническим сечением.

Построение выполняем так (рис. 42). Принимая за стороны описанного около q шестиугольника прямые a, a (дважды!), b, c, d, e, будем иметь пять вершин шестиугольника: A, B, C, D, E. Проводим прямые AD и BE; пусть они пересекутся в точке K. Строим прямую CK и находим точку F пересечения ее с прямой a. Точка F будет шестой

вершиной шестиугольника, и, следовательно, в этой точке прямая a касается конического сечения q.

Применяя теоремы Паскаля и Брианшона, читатель может без большого труда решить, пользуясь одной только линейкой, семь приведенных ниже задач.

1°. Даны четыре точки A, B, C, D конического сечения q и касательная a к нему в точке A. Построить касательную к q в точке B.

2°. Даны три точки A, B, C конического сечения q, касательная a к q в точке A и касательная b к q в точке B. Построить четвертую точку линии q.

3°. Даны три точки A, B, C конического сечения q, касательная a к q в точке A и касательная b к q в точке B. Построить касательную к q в точке C.

4°. Даны четыре касательные a, b, c, d к коническому сечению q и точка A касания прямой a с линией q. Построить пятую касательную к q.

5°. Даны четыре касательные a, b, c, d к коническому сечению q и точка A касания прямой a с линией q. Построить точку касания линий b и q.

6°. Даны три касательные a, b, c к коническому сечению q, точка A касания прямой a с линией q и точка B касания прямой b с линией q. Построить четвертую касательную к q.

7°. Даны три касательные a, b, c к коническому сечению q, точка A касания прямой a с линией q и точка B касания прямой b с линией q. Построить точку касания линий c и q.

§ 13. Построения линейкой, если заданы две параллельные прямые

В рассматриваемых далее построениях мы нередко будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 20. *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения ее непараллельных сторон, делит пополам каждую из параллельных сторон трапеции.*

Эту теорему можно доказать, основываясь на гармонических свойствах полного четырехугольника $CDEF$ (рис. 43): так как четвертой гармонической к точкам A, B; K является бесконечно удаленная точка, то $AK = KB$.

Возможно и другое доказательство, основанное на совершенно элементарных соображениях. Имеем следующие пары подобных треугольников: AKE и DLE, KBE и LCE, AKF и CLF, KBF и DLF. Отсюда заключаем, что

$$\frac{AK}{DL} = \frac{KE}{LE}, \qquad \frac{KB}{LC} = \frac{KE}{LE}$$

и

$$\frac{AK}{LC}=\frac{KF}{FL},\qquad \frac{KB}{DL}=\frac{KF}{FL}.$$

Из этих соотношений вытекают пропорции:

$$\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC},\qquad \frac{AK}{KB}=\frac{LC}{DL}.$$

Перемножив почленно последние два равенства, получим:

$$\left(\frac{AK}{KB}\right)^2=1.$$

Следовательно, $AK=KB$.

Задача 13. Дан отрезок AB и его середина K. Через данную точку D провести прямую, параллельную прямой AB.

Строим прямые AD, BD, BE и KE, где E — произвольная точка луча AD (см. рис. 43). Обозначим через F точку пересечения прямых BD и KE. Проводим прямую AF; она пересечет BE в некоторой точке C. Строим прямую CD; она параллельна прямой AB.

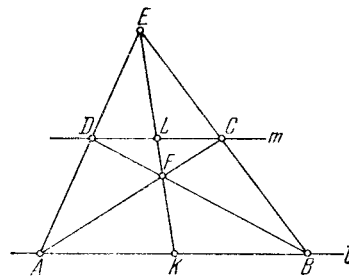


Рис. 43.

Задача 14. Прямые l и m параллельны. Разделить пополам отрезок AE прямой l.

Берем произвольную точку E, не лежащую ни на l, ни на m (см. рис. 43), и проводим прямые AE и BE. Пусть эти прямые пересекают m соответственно в точках D и C. Строим прямые AC и BD; обозначим точку их пересечения через F. Прямая EF пройдет через середину отрезка AB.

Задача 15. Через точку A, лежащую вне данных параллельных прямых l и m, провести прямую, параллельную данным.

Произвольный отрезок на прямой l делим пополам (задача 14) и через A проводим прямую, параллельную прямой l (задача 13).

Задача 16. Даны две параллельные прямые l и m и на l отрезок AB. Увеличить отрезок AB в n раз (n — целое число).

Через произвольную точку K (рис. 44) вне прямых l и m проводим прямую p, параллельную данным прямым (задача 15). Строим прямые AK и BK; пусть они пересекут m соот-

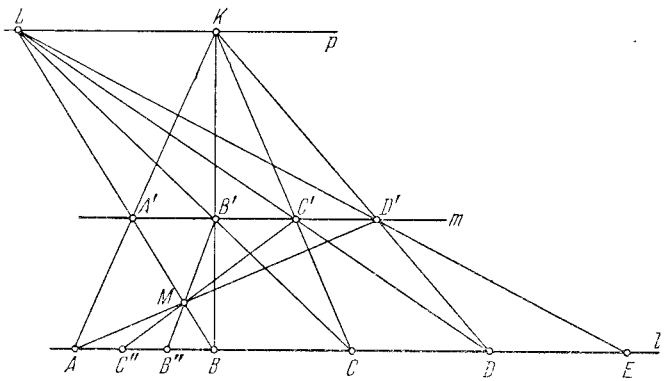


Рис. 44.

ветственно в точках A' и B'. Строим прямую BA', пересекающую p в точке L, и прямую LB', пересекающую l в точке C. Тогда $AB = BC$. Продолжая построение, получим отрезки CD, DE и т. д.; каждый из них равен отрезку AB.

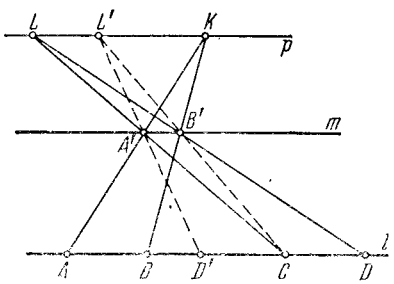


Рис. 45.

Задача 17. Даны две параллельные прямые l и m, на l — отрезок AB и точка C. Построить на l отрезок CD, равный отрезку AB.

Через произвольную точку K вне прямых l и m проводим прямую, параллельную данным прямым. Дальнейшее построение очевидно из рисунка 45. Задача имеет два решения (отрезки CD и CD').

Задача 18. Даны две параллельные прямые l и m и на l отрезок AB. Разделить этот отрезок на n равных частей.

Пусть требуется разделить отрезок AB (см. рис. 44) на три равные части. Если мы увеличим отрезок AB в три раза так, как это сделано в задаче 16, то получим на прямой m равные между собой отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$. Про-

водим, далее, прямые AD', BA'; обозначим точку их пересечения через M. Строим, наконец, прямые $B'M$ и $C'M$; они разделят отрезок AB на три равные части.

Задача 19. Даны две параллельные прямые l и m и на l отрезок AB. Построить $\frac{1}{n}$ часть отрезка AB (n — целое число).

Согласно условию задачи, достаточно построить один только отрезок, равный $\frac{1}{n} \cdot AB$, тогда как в предыдущей задаче нужно было построить n таких отрезков.

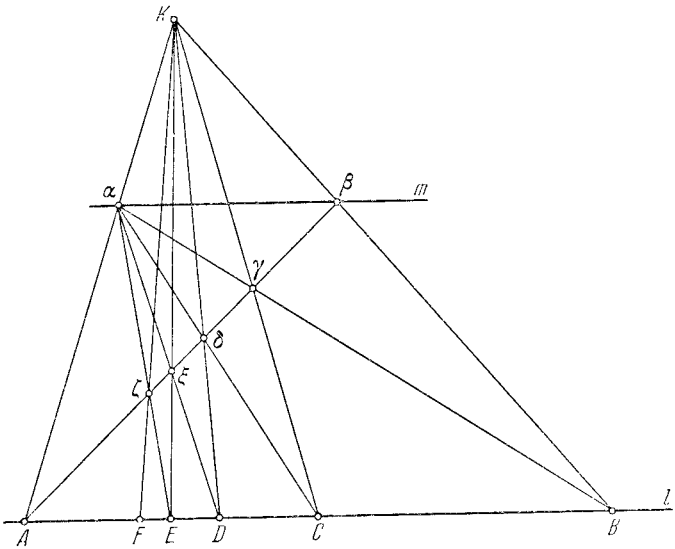


Рис. 46.

Приведем изящное решение этой задачи, предложенное Брианшоном.

Через произвольную точку K вне прямых l и m проводим прямые AK и BK (рис. 46); пусть они пересекают m в точках α и β. Строим прямые $A\beta$, $B\alpha$ (пересекаются в точке γ), $K\gamma$ (пересекает l в точке C), αC (пересекает $A\beta$ в точке δ), $K\delta$ (пересекает l в точке D). Докажем, что

$$AD = \frac{1}{3} AB.$$

Рассматривая полный четырехугольник $\alpha\beta\gamma K$, приходим к заключению, что точки A, C; D, B образуют гармоническую группу; следовательно,

$$AD : DC = AB : CB.$$

Но $AB = 2 \cdot CB$ (см. задачу 14), поэтому из предыдущего равенства имеем: $AD = 2 \cdot DC$; следовательно, $AD = \frac{1}{3} AB$.

Если проведем еще прямые: αD (пересекает $A\beta$ в точке ξ) и $K\xi$ (пересекает l в точке E), то получим отрезок $AE = \frac{1}{4} AB$.

Построив, далее, прямые αE (пересекает $A\beta$ в точке ζ) и $K\zeta$ (пересекает l в точке F), получим отрезок $AF = \frac{1}{5} AB$.

Чтобы доказать последние два равенства, достаточно принять во внимание, что как точки A, D; E, B, так и точки A, E; F, B образуют гармоническую группу.

Продолжая построение, найдем одну шестую, одну седьмую,... часть отрезка AB.

§ 14. Построения линейкой, если задан параллелограмм или квадрат

Пользуясь параллелограммом, можно решить следующую задачу:

Задача 20. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой l.

Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проводим прямую, параллельную одной из его сторон. Тогда на данной прямой l образуются два равных между собой отрезка EF и FG (рис. 47); таким образом, приходим к задаче 13. Случаи $l \parallel BC$ и $l \parallel AB$ приводятся к задаче 15.

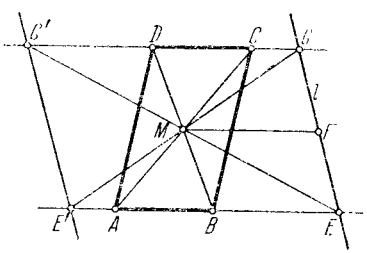


Рис. 47.

Второй способ решения состоит в построении точек G' (пересечение прямых CD и EM) и E' (пересечение прямых AB и GM). Прямая $E'G'$ параллельна прямой l; следовательно, мы снова пришли к задаче 15.

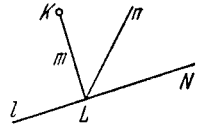
Пользуясь квадратом, можно, кроме задач 14—20, решить также две приводимые ниже задачи.

Задача 21. Через данную точку K провести перпендикуляр к данной прямой l.

Пусть дан квадрат $ABCD$ (рис. 48). Строим его диагонали и через точку M их пересечения проводим прямую EF, параллельную l (задача 20). Строим, далее, $FG \parallel AB$ и $GH \parallel AC$.

Легко доказать, что $HM \perp EF$. Действительно, из построения вытекает, что $CF = GD = DH$; далее, $MD = MC$, $\angle MDH = \angle MCF = 45°$. Следовательно, треугольник MDH равен треугольнику MCF. Отсюда выводим, что

$$\angle HMF = \angle HMC + \angle CMF = \\ = \angle HMC + \angle HMD = \\ = \angle DMC = 90°.$$



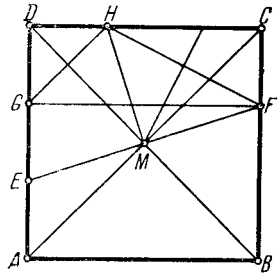


Рис. 48.

Значит, для решения задачи нужно через точку K провести прямую m, параллельную HM. Эта прямая будет искомым перпендикуляром.

Задача 22. Разделить пополам данный прямой угол.

Пусть требуется разделить пополам данный прямой угол KLN (рис. 48). Поскольку стороны этого угла параллельны сторонам угла FMH (см. предыдущую задачу), то для решения данной задачи достаточно через точку L провести прямую, параллельную биссектрисе угла FMH, которая, как легко убедиться, перпендикулярна к прямой FH. Действительно, треугольник FMH равнобедренный, так как $MF = MH$ вследствие равенства треугольников MDH и MCF.

Поэтому искомой биссектрисой угла KLN будет прямая n, проходящая через точку L перпендикулярно к прямой FH (задача 21).

§ 15. Построения линейкой, если даны окружность и ее центр

Если задача на построение разрешима линейкой и циркулем, то, как известно, ее решение алгебраическим методом приводится к построению корней одного или нескольких

алгебраических уравнений первой и второй степеней. В связи с этим такие задачи принято называть задачами второй степени.

Заслуживает внимания следующий факт: каждую конструктивную задачу второй степени можно решить одной только линейкой, если в плоскости построений начерчена окружность и указан ее центр [1]). Для доказательства достаточно убедиться, что с помощью этого аппарата можно находить точки пересечения окружности, заданной центром и радиусом, с прямой линией, а также точки пересечения двух окружностей, заданных аналогичным образом. Действительно, в задачах на построение циркуль используется только для выполнения этих двух операций [2]). Соответствующие построения будут рассмотрены нами в задачах 30 и 31. Однако в ряде случаев можно обойтись без их применения, прибегая для решения задач к более простым приемам. Поэтому сначала мы рассмотрим несколько основных конструктивных задач и дадим практически удобные способы их решения.

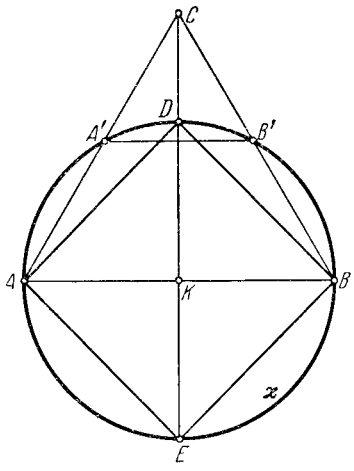


Рис. 49.

Мы будем считать, что в плоскости чертежа каждой задачи этого параграфа описана вспомогательная окружность x и построен ее центр K.

---

[1]) Впервые этот факт был установлен французским математиком Понселе и — независимо от него — немецким математиком Штейнером.

Жан Виктор Понселе (1789—1867) был в молодости офицером наполеоновской армии; участвовал в походе на Россию в 1812 г.; был взят в плен и прожил два года в Саратове, где занялся исследованиями в области проективной геометрии.

Якоб Штейнер (1796—1863) — сын швейцарского крестьянина. В возрасте 19 лет, почти не умея писать, он поступил в школу знаменитого педагога Песталоцци. На 39 году жизни он был избран действительным членом Берлинской академии наук.

[2]) Линейкой нельзя описать окружность, но можно построить любое число точек окружности, если известны пять ее точек (задача 8); см. также дальше задачу 29.

Задача 23. Построить квадрат.

Строим диаметр AB окружности $\varkappa$ (рис. 49) и проводим ее хорду $A'B'$, параллельную AB (задача 13). Через точку C пересечения прямых AA' и BB' проводим прямую CK; она пересечет окружность $\varkappa$ в точках D и E. Четырехугольник $ADBE$ — квадрат.

Отсюда заключаем, что все задачи параграфов 13 и 14 можно решить линейкой, если начерчена окружность и построен ее центр.

Задача 24. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой l.

Если l проходит через K, то имеем задачу 13. В противном случае нужно провести сначала какую-нибудь прямую, параллельную l, в результате чего придем к задаче 15. Построение очевидно из рисунка 50; прямая GH параллельна l.

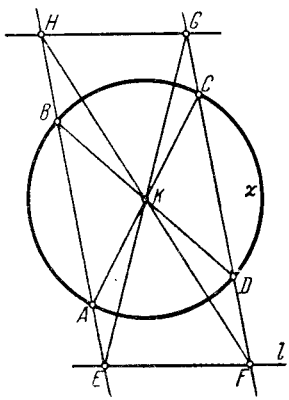


Рис. 50.

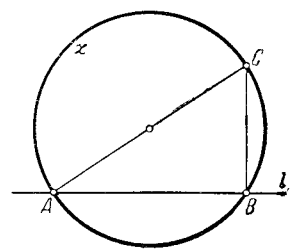


Рис. 51.

Задача 25. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой l.

Если l пересекает окружность $\varkappa$ в точках A и B, но не проходит через ее центр, то проводим диаметр AC окружности $\varkappa$; прямая CB перпендикулярна к l (рис. 51). Затем через данную точку проводим прямую, параллельную CB.

В иных случаях применяем тот же метод, но предварительно строим прямую, параллельную l и пересекающую окружность $\varkappa$ в двух точках, не лежащих на одном диаметре.

Задача 26. Через данную точку P провести прямую, образующую с данной прямой l данный угол $MON = \alpha$.

Решение приведено на рис. 52, где $KA \parallel OM$, $KB \parallel ON$, $KC \parallel l$, $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$, $PD' \parallel KD$, $PE' \parallel KE$.

Если α — острый или тупой угол, то задача имеет два решения.

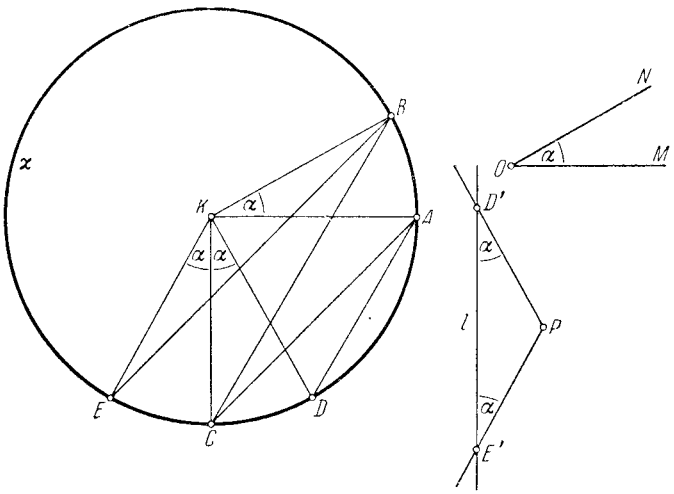


Рис. 52.

Задача 27. Удвоить данный угол $MON = \alpha$.

Проводим параллельно прямой OM диаметр AB окружности x и параллельно прямой ON хорду AC (рис. 53). Тогда $\angle BKC = 2\alpha$. Сторона OR искомого угла MOR параллельна прямой KC.

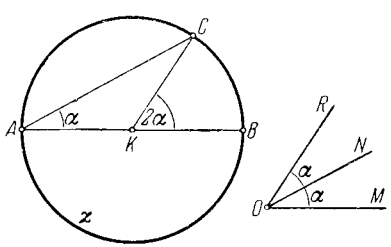


Рис. 53.

Задача 28. Построить биссектрису данного угла $MON = \alpha$.

Построение выполнено на рис. 54, где $AB \parallel OM$, $KC \parallel ON$, $OR \parallel AC$.

Задача 29. Дан отрезок AB и луч h с вершиной C. Построить на h отрезок CD, равный AB.

Строим параллелограмм $KABH$ и проводим параллельно h луч KF (рис. 55). Пусть лучи KH и KF пересекают окружность x в точках E и F. Проводим прямые EF и $HL \parallel EF$

до пересечения с KF в точке L. Строим параллелограмм $CKLD$. Отрезок CD — искомый.

Построение упростится, если точки K, A, B или точка K и луч h лежат на одной прямой.

Это построение позволяет находить точки окружности на прямых, проходящих через ее центр, если даны ее центр и радиус.

Задача 30. Построить точки пересечения данной прямой l с окружностью μ, заданной центром M и радиусом MN, но не начерченной.

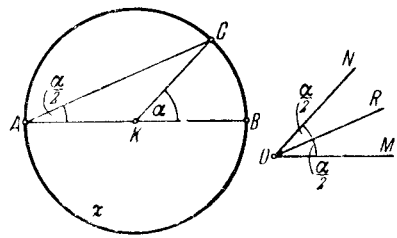


Рис. 54.

Проводим параллельно прямой MN радиус KL окружности $\varkappa$ (рис. 56). Строим прямые KM и LN и находим точку их пересечения A — центр подобия окружностей $\varkappa$ и μ (на рисунке построен внешний центр подобия).

Найдем, далее, прямую l', в которую перейдет прямая l, если применить к данной фигуре преобразование подобия с центром A, переводящее окружность μ в окружность $\varkappa$.

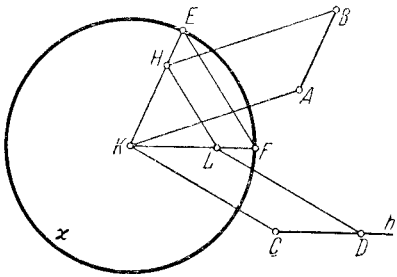


Рис. 55.

Для этого берем на l произвольную точку B, строим отрезки BA и BM, проводим через K прямую $KC \parallel MB$ до пересечения с AB в точке C и через C проводим $l' \parallel l$. Пусть l' пересекает окружность $\varkappa$ в точках D и E. Прямые AD и AE пересекают прямую l в искомых точках F и G.

Если точки D и E совпадают, то l касается окружности μ. Если l' не имеет общих точек с окружностью $\varkappa$, то l не имеет общих точек с окружностью μ.

Если точка A бесконечно удалена, то вместо внешнего следует взять внутренний центр подобия окружностей $\varkappa$ и μ. Как изменится построение в случае, когда окружности $\varkappa$ и μ концентричны?

Задача 31. Даны центры M и N окружностей μ и ν и их радиусы. Построить точки пересечения этих окружностей.

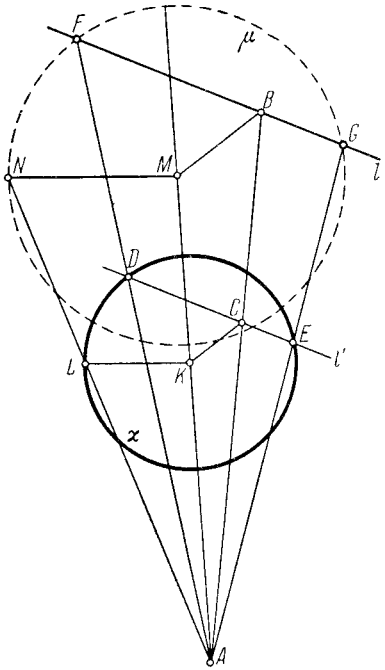


Рис. 56.

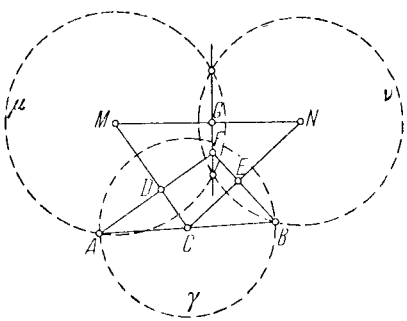


Рис. 57.

Начнем с построения радикальной оси данных окружностей. Пусть A — произвольная точка окружности μ, B — произвольная точка окружности ν, причем по крайней мере одна из точек A, B не лежит на прямой MN (рис. 57).

Строим отрезок AB, находим его середину C и проводим прямые MN, MC, NC, $AD \perp CM$, $BE \perp CN$. Пусть прямые AD и BE пересекаются в точке F; строим $FG \perp MN$. Прямая FG есть радикальная ось окружностей μ и ν. Действительно, построив на отрезке AB, как на диаметре, окружность γ, замечаем, что точка F есть радикальный центр окружностей μ, ν и γ, следовательно, она лежит на радикальной оси окружностей μ и ν.

Так как радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения, то данная задача приводится к предыдущей — нахождению точек пересечения окружности (μ или ν) и прямой (FG).

§ 16. Построения линейкой, если даны центр окружности и ее дуга

Пусть в плоскости α дана прямая π (назовем ее основной прямой) и не лежащая на ней точка P (основная точка). Рассмотрим преобразование плоскости α, состоящее в следующем. Точка P и каждая точка прямой π преобразуются в себя. Всякая иная точка M плоскости α преобразуется в точку N — четвертую гармоническую к P, Q; M, где Q — точка пересечения прямых π и PM (рис. 58). Отсюда непосредственно вытекает, что точка N преобразуется в M, то есть точки M и N меняются местами; действительно, из равенства $(PQMN) = -1$ в силу теоремы 8 получим: $(PQNM) = -1$, следовательно, M есть четвертая гармоническая точка к P, Q; N.

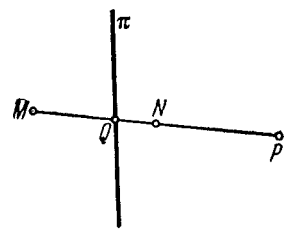


Рис. 58.

Рассмотренное преобразование мы будем называть гармоническим преобразованием плоскости. Отметим некоторые его свойства.

Легко видеть, что прямая, проходящая через точку P, преобразуется в себя. Далее, прямая m, не проходящая через P, преобразуется в прямую n, которую можно

построить так: если m и π пересекаются в точке S и отличная от S точка M прямой m преобразуется в точку N, то прямую n проводим через S и N (рис. 59). Действительно, в силу теоремы 6 любая точка M' прямой m преобразуется в точку пересечения прямых PM' и SN.

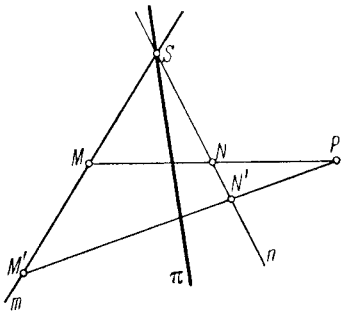


Рис. 59.

Если S — бесконечно удаленная точка, то $n \parallel m \parallel \pi$.

Если m — бесконечно удаленная прямая, то n делит пополам отрезки, соединяющие точку P с точками прямой π.

Если P — полюс прямой π относительно конического сечения q, то q преобразуется в себя, причем точки пересечения линии q с прямой, проходящей через P, меняются местами. Этот факт является следствием полярных свойств конических сечений (см. § 9).

Задача 32. Начерчена дуга AB и центр K окружности $\varkappa$. Построить точки пересечения окружности $\varkappa$ с данной прямой m.

Заметим прежде всего, что через данную или построенную точку H окружности $\varkappa$ (на дуге AB или вне ее) можно провести, пользуясь только линейкой, касательную к $\varkappa$ (задача 7); если через H провести произвольную прямую, то можно построить вторую точку пересечения этой прямой с окружностью $\varkappa$ (задача 8). Действительно, окружность $\varkappa$ есть коническое сечение, и на ее дуге AB можно взять столько точек, сколько их необходимо для решения указанных задач.

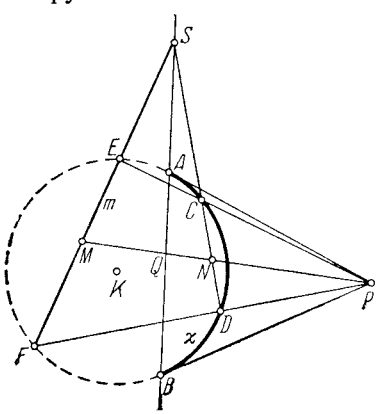


Рис. 60.

Приступим к решению поставленной задачи.

Проведем прямую AB и построим ее полюс P относительно окружности $\varkappa$ как точку пересечения касательных

к $\varkappa$ в A и B (рис. 60). Будем считать, что прямая m не имеет общих точек с данной дугой AB и пересекает прямую AB в точке S.

Берем на m произвольную точку M, отличную от S, и проводим прямую PM; пусть она пересекает прямую AB в точке Q. Строим точку N — четвертую гармоническую к P, Q; M — и прямую SN. Пусть эта прямая пересекает данную дугу AB в точках C и D, а прямые PC и PD пересекают m в точках E и F. Эти точки будут искомыми точками пересечения окружности $\varkappa$ с прямой m.

Действительно, приняв точку P и прямую AB за основные точку и прямую и применив к построенной фигуре гармоническое преобразование, заметим, что окружность $\varkappa$ преобразуется в себя, а прямые m и SN поменяются местами, следовательно, поменяются местами их точки пересечения с окружностью $\varkappa$.

Рассмотрение задачи 32 приводит нас к заключению, что каждую конструктивную задачу второй степени можно решить линейкой, если в плоскости построений начерчены центр и дуга некоторой окружности $\varkappa$, так как и в этом случае, пользуясь только линейкой, можно находить точки пересечения окружности $\varkappa$ с любой пересекающей ее прямой и, следовательно, выполнить все построения параграфа 15. Впервые к этому выводу пришли, независимо друг от друга, итальянский математик Севери и советский математик Д. Д. Мордухай-Болтовской [1]).

§ 17. Построение линейкой точек окружности, принадлежащей данному пучку окружностей

Рассмотрим предварительно два вспомогательных предложения.

Теорема 21. *Если прямая PK, где K — центр окружности $\varkappa$, пересекает поляру π точки P относительно $\varkappa$ в точке P', то точки P и P' симметричны относительно окружности $\varkappa$.*

Обозначим точки пересечения прямой PK с окружностью $\varkappa$ через M и N и построим точку Q, симметричную с P

[1]) Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876—1952) известен своими исследованиями в области геометрии и истории математики. Он положил начало систематической разработке теории геометрических построений в пространстве Лобачевского.

относительно $\varkappa$. Из теоремы 11 вытекает, что точки P, Q; M, N образуют гармоническую группу. Но, в силу определения поляры, точки P, P'; M, N также образуют гармоническую группу. Следовательно, точки P' и Q совпадают, что и требовалось доказать.

Теорема 22. *Если даны пучок окружностей и в его плоскости точка P, то поляры этой точки относительно всех окружностей пучка пересекаются в одной и той же точке Q и середина отрезка PQ лежит на радикальной оси пучка.*

Рассмотрим три окружности данного пучка λ, μ, ν с центрами L, M, N и точку P, не лежащую на прямой LM

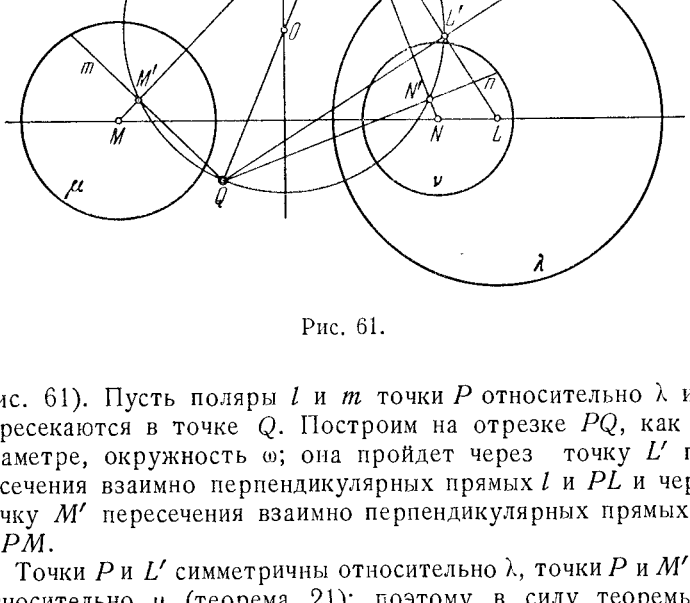


Рис. 61.

(рис. 61). Пусть поляры l и m точки P относительно λ и μ пересекаются в точке Q. Построим на отрезке PQ, как на диаметре, окружность ω; она пройдет через точку L' пересечения взаимно перпендикулярных прямых l и PL и через точку M' пересечения взаимно перпендикулярных прямых m и PM.

Точки P и L' симметричны относительно λ, точки P и M' — относительно μ (теорема 21); поэтому в силу теоремы 1 окружность ω ортогональна к окружностям λ и μ, следовательно, она ортогональна и к окружности ν, и ее центр O лежит на радикальной оси пучка.

Построим прямую PN и обозначим через N' вторую точку пересечения ее с окружностью ω. Поляра n точки P относительно окружности ν проходит через N' (в силу ортогональности окружностей ν и ω) и перпендикулярна к прямой PN; следовательно, этой полярой будет прямая $N'Q$ ($\angle PN'Q = 90°$, так как он опирается на диаметр окружности ω). Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

Если точка P лежит на линии центров пучка, то ее поляры относительно окружностей λ, μ, ν параллельны; в этом случае точка Q будет бесконечно удаленной и точки P и Q не определяют отрезка.

Из теоремы 16 следует, что поляры точки Q относительно окружностей данного пучка проходят через точку P. Точки P и Q мы будем называть полярно сопряженными.

Рассмотрим окружность пучка, проходящую через P. Полярой точки P относительно этой окружности является касательная к ней в P; в силу теоремы 22 она проходит

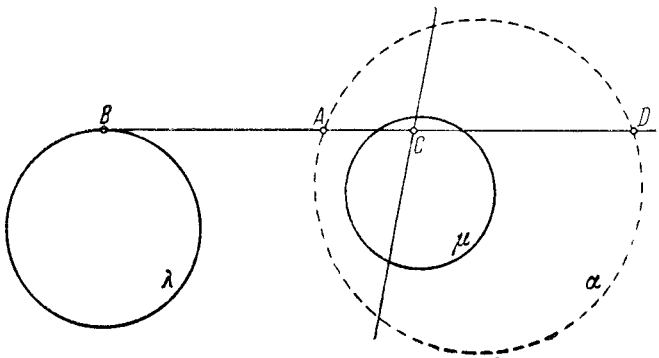


Рис. 62.

через Q. Точно так же убеждаемся, что прямая PQ касается окружности пучка, проходящей через Q. Таким образом, прямая PQ будет общей касательной двух упомянутых окружностей.

Задача 33. Построить пять точек окружности α, проходящей через данную точку A и принадлежащей пучку, заданному двумя начерченными окружностями λ и μ.

Пусть точка A лежит вне хотя бы одной из данных окружностей, например вне окружности λ (рис. 62).

Проведем через A касательную AB к λ (B — точка касания). Строим точку C, полярно сопряженную с B (она

лежит на прямой AB), и точку D — четвертую гармоническую к B, C; A.

Точка D лежит на окружности α; это вытекает из определения поляры и из того факта, что поляра точки B относительно α проходит, в силу теоремы 22, через точку C.

Построение можно продолжить, приняв точку D за исходную; действительно, точка D лежит на касательной к окружности λ, следовательно, она расположена вне этой окружности. Если D совпадает с A, то для построения отличной от A точки, принадлежащей окружности α, можно воспользоваться второй касательной, проведенной из A к λ.

Если будем иметь пять точек окружности α или три точки и касательные в двух из них (например, AE и DF, где E и F — точки, полярно сопряженные соответственно с A и D), то построение новых точек этой окружности можно производить, не пользуясь окружностями λ и μ (см. § 12).

Рассмотрим теперь случай, когда точка A лежит внутри каждой из окружностей λ и μ (рис. 63).

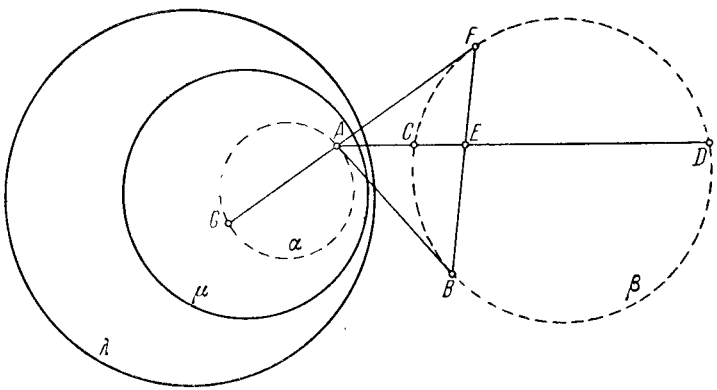


Рис. 63.

Строим точку B, полярно сопряженную с A. Она лежит вне окружностей λ и μ, следовательно, можно построить сколько угодно точек окружности β, принадлежащей данному пучку и проходящей через B. Прямая AB будет общей касательной окружностей α и β.

Через точку C окружности β, отличную от B, проводим прямую AC, находим точку D, в которой AC вторично пересекает окружность β, и точку E — четвертую

гармоническую к точкам C, D; A. Прямая BE будет полярой точки A относительно β; строим вторую точку (F) пересечения этой прямой с окружностью β. Тогда на прямой AF, касающейся окружности β, можно построить, как показано выше, отличную от A точку G окружности α.

Аналогично предыдущему можно провести из G касательную к β, отличную от GF, и найти третью точку окружности α. Продолжив построение, найдем четвертую точку этой окружности, после чего можно строить новые ее точки, не пользуясь окружностями λ и μ (см. задачу 10).

§ 18. О невозможности построить линейкой центр окружности

В § 15 мы рассматривали построения линейкой при условии, что в плоскости построений описана вспомогательная окружность и известен ее центр. В связи с этим естественно возникает вопрос: можно ли, пользуясь только линейкой, построить центр начерченной окружности, если он не дан? Это построение легко выполнить, если, например, в плоскости данной окружности начерчен параллелограмм или же иная окружность с ее центром. Однако

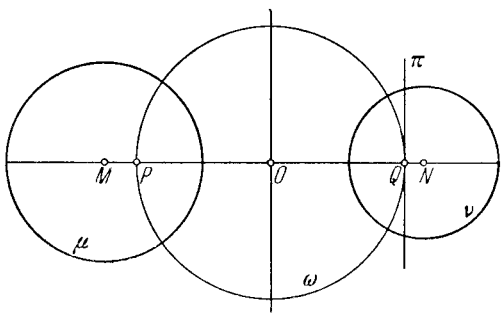


Рис. 64.

в случае, когда мы не располагаем этими или другими вспомогательными фигурами, поставленную задачу, как вытекает из приводимой ниже теоремы 23, решить нельзя.

Рассмотрим две не имеющие общих точек окружности μ и ν с центрами M и N (рис. 64). Пусть их радикальная ось пересекает прямую MN в точке O. Опишем окружность ω с центром O, ортогональную к данным окружностям. Пусть она пересекает прямую MN в точках

P и Q. Проведем через Q прямую π, перпендикулярную к MN.

Точки P и Q симметричны как относительно окружности μ, так и относительно окружности ν (теорема 2). Поэтому в силу теорем 11 и 14 точка P является полюсом прямой π относительно каждой из окружностей μ и ν.

Применим к построенной фигуре гармоническое преобразование, принимая P и π за основные точку и прямую (см. § 16). Тогда окружности μ и ν преобразуются в себя, но их центры, лежащие вне отрезка PQ, преобразуются в точки, лежащие внутри этого отрезка. Это обстоятельство будет использовано нами при доказательстве теоремы 23.

Теорема 23. *Если две данные неконцентрические окружности μ и ν не имеют ни одной общей точки, то невозможно построить их центры M и N, пользуясь одной только линейкой.*

Если это построение возможно, то выполняется оно так: выбираем в плоскости окружностей μ и ν несколько произвольных точек и проводим несколько произвольных прямых, а затем строим прямые, проходящие через выбранные точки и через точки, в которых построенные ранее прямые пересекаются друг с другом и с данными окружностями; наконец, находим центр одной из данных окружностей как точку пересечения двух определенных прямых из числа построенных нами.

Если применить к фигуре, полученной в результате этого построения, рассмотренное выше гармоническое преобразование, то получим новую фигуру, которую можно образовать, повторяя в точности все построения, выполненные нами при нахождении центра одной из данных окружностей. Различие будет лишь в том, что произвольно выбранные в начале построения точки и прямые будут иными, нежели у первой фигуры. Следовательно, новое построение вполне равнозначно первому, так как каждое из них можно начать только с построения произвольных точек и проведения произвольных прямых.

Поэтому (если сделанное нами допущение справедливо) каждое из двух рассмотренных построений должно одним и тем же способом привести к нахождению центра одной и той же окружности. Но это невозможно, так как в результате гармонического преобразования центры M и N окружностей μ и ν переходят в отличные от M и N точки; следовательно, прямые, которые в первом построении пе-

рёсекались в центре окружности μ (или ν), преобразуются в прямые, точка пересечения которых не лежит в центре этой окружности. Итак, допущение о возможности построить линейкой центр окружности μ или ν ошибочно. Поэтому подавно нельзя построить линейкой центр окружности, если начерчена одна только эта окружность.

Приведенное выше доказательство имеет силу также и тогда, когда начерчено несколько неконцентрических окружностей, принадлежащих одному и тому же гиперболическому пучку; если, например, пучок определяется окружностями μ и ν, то применение того же гармонического преобразования доказывает это утверждение.

§ 19. Случаи, когда можно построить линейкой центры двух начерченных окружностей

Для последующего важно заметить, что можно построить линейкой диаметр начерченной окружности, если в ее плоскости начерчены две параллельные прямые ($p \parallel q$). Если они пересекают данную окружность, то выполняем построение, указанное на рис. 65; прямая AB есть искомый диаметр. В иных случаях приходим к той же конфигурации, пользуясь тем, что через произвольную точку данной окружности можно провести прямую, параллельную прямым p и q (задача 15). Отсюда вытекает, что можно построить линейкой два диаметра начерченной окружности, а значит, и ее центр, если в ее плоскости начерчен параллелограмм.

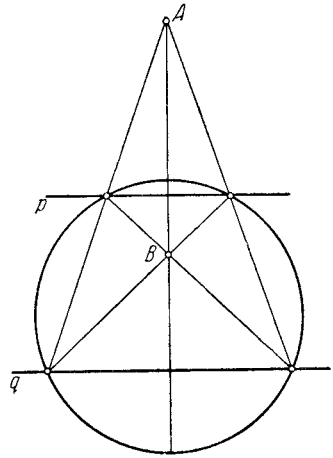


Рис. 65.

Задача 34. Построить линейкой центры двух начерченных окружностей λ и μ в каждом из следующих случаев:

1° кроме данных окружностей, начерчена в их плоскости пара параллельных прямых: $p \parallel q$;

2° данные окружности пересекаются;

3° данные окружности касаются друг друга;

4° данные окружности концентричны, но их общий центр неизвестен;

5° данные окружности неконцентричны и не имеют общих точек; известна точка A их радикальной оси;

6° данные окружности неконцентричны и не имеют общих точек; известна точка A их линии центров.

Рассмотрим отдельно каждый из перечисленных случаев. Прямых, обозначенных на чертежах пунктиром, не проводим: они нужны для обоснования построений.

1°. Строим полюсы P, Q прямых p и q относительно λ и полюсы P', Q' этих же прямых относительно μ (рис. 66).

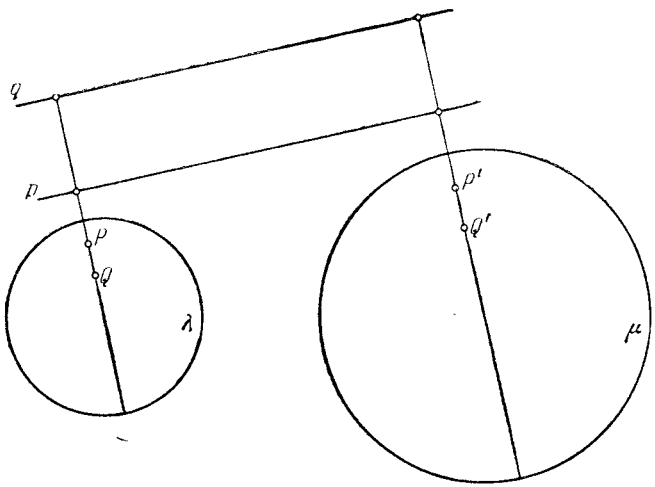


Рис. 66.

Прямые p, q, PQ и $P'Q'$ образуют прямоугольник, так как $PQ \perp p$, $P'Q' \perp p$.

Если прямая $P'Q'$ совпадает с PQ, то она будет линией центров данных окружностей. В этом случае указанный выше способ построения непригоден, но можно воспользоваться построением 6°.

2°. Первое решение. Берем две произвольные точки C и D на одной из данных окружностей, отличные от точек их пересечения, и выполняем построение, указанное на рис. 67. Прямые EH и GF параллельны, так как $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6$. Затем строим аналогично еще две параллельные прямые и получаем параллелограмм.

Второе решение. Проводим в точке B пересечения данных окружностей касательную BC к окружности λ, бе-

рем на λ произвольную точку D и строим прямые DA, DB, CE (рис. 68). Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, следовательно, $CE \parallel DB$.

Заметим, что задача может быть решена этими же способами и в случае, когда одна из данных окружностей не начерчена полностью: достаточно иметь пять ее точек, в число которых обязательно должны входить точки пересечения данных окружностей.

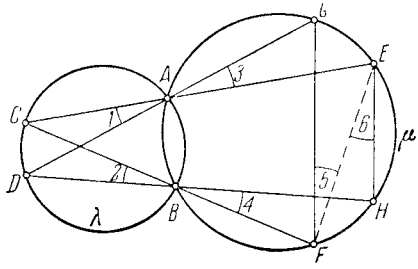


Рис. 67.

3°. Построение двух параллельных прямых BC и DE приведено на рис. 69, где $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

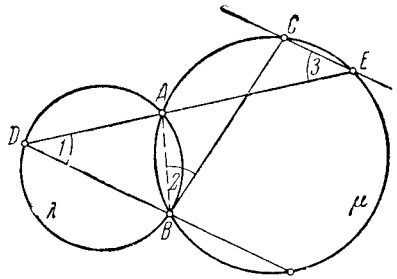


Рис. 68.

4°. Выполняем построение, приведенное на рис. 70, и получаем две параллельные прямые AB и CD.

5°. Строим точку B, полярно сопряженную с точкой A радикальной оси. Прямая AB будет радикальной осью данных окружностей. Берем точку C вне прямой AB и строим точку D, полярно сопряженную с C. Прямая AB делит отрезок CD пополам (теорема 22), следовательно, можно провести прямую, параллельную CD (задача 13), и воспользоваться построением 1°. Если точка A лежит и на радикальной оси и на линии центров окружностей λ и μ, то радикальная ось параллельна полярам точки A относительно λ и μ.

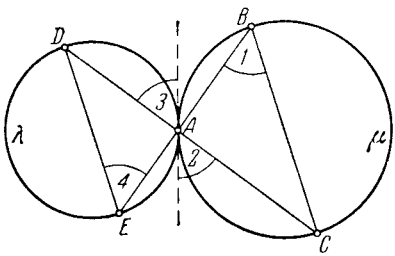


Рис. 69.

6°. Построив поляры точки A относительно окружностей λ и μ, проводим линию центров AB этих окружностей (сравнить рис. 65).

Берем на окружности λ произвольную точку C, не лежащую на прямой AB (рис. 71), строим точку D, полярно сопряженную с C, и пять точек окружности γ, проходящей через D и принадлежащей пучку, определяемому окружностями λ и μ (задача 33).

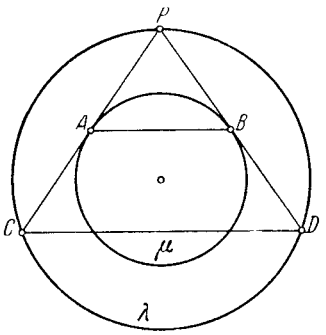


Рис. 70.

Прямая CD будет общей касательной окружностей λ и γ, следовательно, точка E пересечения ее с прямой AB будет центром подобия этих окружностей. Берем на γ произвольную точку F и проводим прямую EF; пусть она пересекает окружность λ в точках H, K и вторично пересекает окружность γ в точке G. Тогда $DF \parallel CH$ и $DG \parallel CK$.

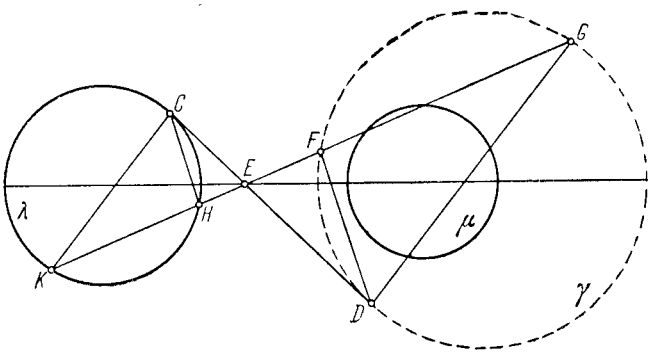


Рис. 71.

§ 20. О построении линейкой центров нескольких окружностей

Задача 35. Начерчены четыре окружности $\varkappa$, λ, μ, ν, причем никакие три из них не принадлежат одному пучку. Построить линейкой центр одной из этих окружностей.

Будем считать, что среди данных окружностей нет концентричных или имеющих общие точки, так как в противном случае мы могли бы воспользоваться построениями 2°, 3° или 4° задачи 34.

Идея решения состоит в построении вспомогательной окружности, пересекающей одну из данных окружностей, причем обе точки пересечения должны быть известны; после этого используется построение 2° задачи 34.

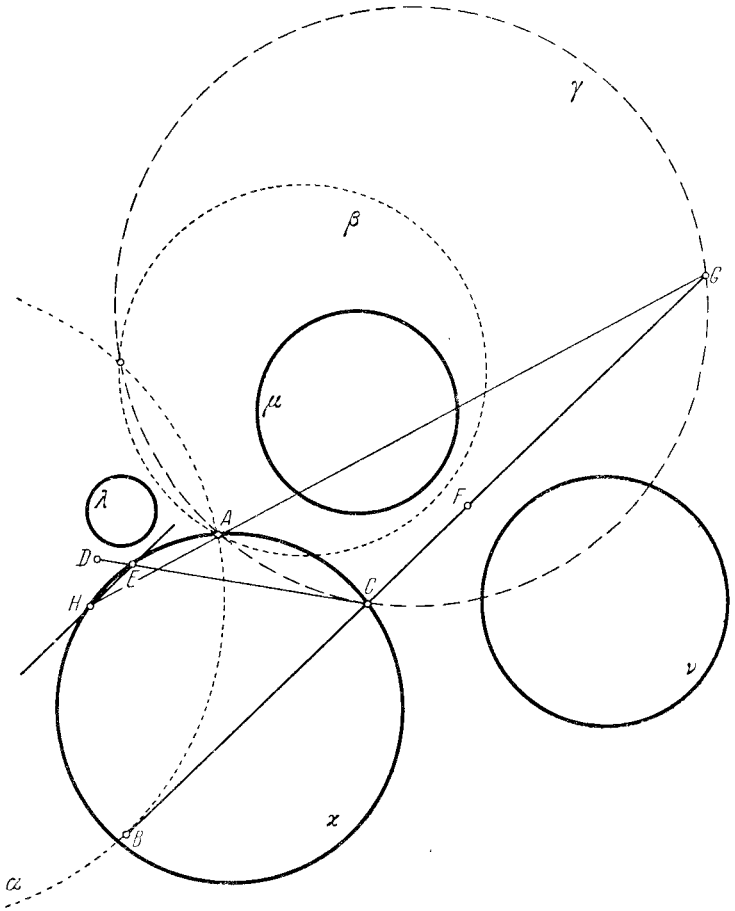


Рис. 72.

Берем на окружности $\varkappa$ произвольную точку A и строим еще четыре точки окружности α, проходящей через A и принадлежащей пучку (λ, μ) [1]), и еще четыре точки окруж-

[1]) Так мы будем обозначать пучок, определяемый окружностями λ и μ.

ности β, проходящей через A и принадлежащей пучку (μ, ν) (рис. 72).

Поскольку вторая точка пересечения окружностей $\varkappa$ и α ($\varkappa$ и β) неизвестна, то необходимо построить еще одну вспомогательную окружность так, чтобы можно было легко найти обе точки пересечения ее с окружностью $\varkappa$. Для этого берем на α точку B внутри окружности $\varkappa$ и проводим в B касательную BC к α (C лежит на $\varkappa$). Заметим, что точку B можно взять и вне окружности $\varkappa$, лишь бы касательная B к окружности α пересекала окружность $\varkappa$.

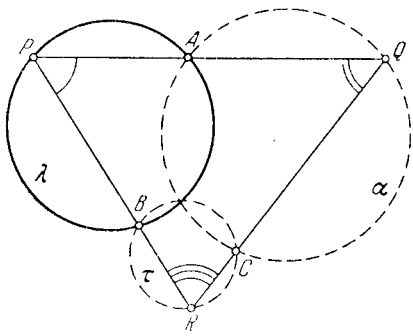


Рис. 73.

Обозначим через γ окружность, проходящую через точку C и принадлежащую пучку (α, β).

Строим точки F и D, полярно сопряженные с B и C относительно окружностей пучка (α, β), точку G — четвертую гармоническую к точкам B, F; C — и прямую AG. Точка G принадлежит окружности γ, а прямая CD касается γ в точке C (см. § 17). Точка A также принадлежит окружности γ, так как γ проходит через точки пересечения окружностей α и β. Итак, известны две общие точки A и C окружностей $\varkappa$ и γ.

Пусть прямые CD и AG пересекают вторично окружность γ в точках E и H. Тогда $EH \parallel BC$ (см. второе решение задачи 34, 2°). Дальше пользуемся построением 1° задачи 34.

Рассмотренное решение пригодно и в том случае, когда одна из окружностей λ, μ или ν задана пятью точками.

Задача 36. Построить линейкой центр одной из трех начерченных окружностей λ, μ, ν, не принадлежащих одному пучку.

Будем считать, что никакие две из данных окружностей не имеют общих точек или общего центра.

Берем на λ произвольную точку A и строим точки окружности α, проходящей через A и принадлежащей пучку (μ, ν).

Проводим, далее, через A переменную прямую; обозначим вторую точку пересечения ее с окружностью λ через P,

с окружностью α — через Q (рис. 73). Если зафиксировать отличные от A точки B и C соответственно на окружностях λ и α, то точка R пересечения прямых BP и CQ будет при вращении прямой PQ вокруг точки A описывать окружность τ, в чем легко убедиться, рассматривая величины углов треугольника PQR; следовательно, нетрудно построить пять точек окружности τ.

Никакие три из окружностей λ, μ, ν, τ не принадлежат одному пучку[1]), поэтому дальше можно воспользоваться построением задачи 35.

---

[1]) Окружность τ не принадлежит гиперболическому пучку (μ, ν), так как она пересекает окружность α этого пучка. Окружность μ (и точно так же окружность ν) не принадлежит эллиптическому пучку (λ, τ), так как она не пересекает окружности λ.

Смогоржевский Александр Степанович.
Линейка в геометрических построениях.

Редактор *В. А. Солодков.*
Технический редактор *Т. Н. Кольченко.*
Корректор *Т. С. Плетнева.*

Сдано в набор 24/VIII 1957 г. Подписано к печати 27/XI 1957 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 2,0. Условн. печ. л. 3,28. Уч.-изд. л. 3,22. Тираж 30 000 экз. Т-10378. Цена книги 95 коп. Заказ № 2405.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29